Suite II - Die Arithmetische

Teil 4: Essays 121-137

$\overset{\star}{\texttt{aut}}$. $\texttt{exc}$. FundamentalSatz Multiplikation1. FundamentalSatz Multiplikation-1. FundamentalSatz Division1. $1 : x = \mathsf{rez}(x)$. $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$. $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$. $1 : (\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{i} : x$. DistributivGesetze i. FundamentalSatz $-$ $:$. $:$Satz Zahlen

Andreas Unterreiter

25. April 2012

$\overset{\star}{\texttt{aut}}$`. exc.`

Ersterstellung: 25/02/10 **Letzte Änderung: 21/04/12**

Bemerkung aut und $\overset{\star}{\texttt{aut}}$.

Die Darstellungen in den Essays gewinnen durch die Einführung logisch ausschließender "oder-Verknüpfungen" an Tiefe. Motivation der Betrachtungen ist die für alle $x, y, z \in \mathbb{S}$ wahre Aussage, dass in *ausschließendem* Sinn *entweder* $x < y$ *oder* $x = y$ *oder* $y < x$ gilt.

Wird die zweistellige, ausschließende "oder-Verknüpfung" mit "aut" bezeichnet, so ist bekannter Weise für zwei Aussagen A, B ist die Aussage "A aut B" äquivalent zu "$(\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \wedge (\neg(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}))$" . Wie kurze Überlegungen zeigen, gilt für zwei Aussagen A, B die Aussage "A aut B" genau dann, wenn "B aut A" gilt und für drei Aussagen "A, B, C" gilt "(A aut B) aut C" genau dann, wenn "A aut (B aut C)" gilt, so dass es nahe liegt, eine ausschliessende Dreieraussage via "A aut B aut C := (A aut B) aut C" zu definieren, wobei wegen des angedeuteten "Assoziativgesetzes für aut" getrost auf die Klammersetzung verzichtet werden kann und es deswegen und wegen des Kommutativgesetzes nicht auf die Reihenfolge der Aussagen ankommt.

Jedoch zeigt sich nach kurzer Überlegung, dass "(A aut B) aut C" logisch äquivalent zu "$((\neg\mathtt{A}) \wedge (\neg\mathtt{B}) \wedge \mathtt{C}) \vee ((\neg\mathtt{A}) \wedge \mathtt{B} \wedge (\neg\mathtt{C})) \vee (\mathtt{A} \wedge (\neg\mathtt{B}) \wedge (\neg\mathtt{C})) \vee (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B} \wedge \mathtt{C})$" ist, so dass aus "A" und aus "(A aut B) aut C" nicht das gewünschte "$(\neg\mathtt{B}) \wedge (\neg\mathtt{C})$" , sondern das schwächere "$((\neg\mathtt{B}) \wedge (\neg\mathtt{C})) \vee (\mathtt{B} \wedge \mathtt{C})$" folgt.

Bezogen auf das einführende Beispiel würde man für alle $x, y, z \in \mathbb{S}$ aus "$x < y$" und aus "$(x < y)$ aut $(x = y)$ aut $(y < x)$" lediglich auf "$(x \neq y) \wedge (\neg(y < x))$" oder "$(x = y) \wedge (y < x)$" schließen können und NICHT auf das gewünschte - und wahre - "$(x \neq y) \wedge (\neg(y < x))$" .

Diese Betrachtungen legen es nahe, für drei Aussagen A, B, C ein dreistelliges, ausschließendes "oder " via

$$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C} :\Leftrightarrow ((\neg\mathtt{A}) \wedge (\neg\mathtt{B}) \wedge \mathtt{C}) \vee ((\neg\mathtt{A}) \wedge \mathtt{B} \wedge (\neg\mathtt{C})) \vee (\mathtt{A} \wedge (\neg\mathtt{B}) \wedge (\neg\mathtt{C}))$$

zu definieren. Kanonischer Weise sollte das korrespondierende zweistellige, ausschließende "oder " mit dem klassischen "aut " identisch sein:

$$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B} :\Leftrightarrow \mathtt{A}\ \mathtt{aut}\ \mathtt{B} :\Leftrightarrow ((\neg\mathtt{A}) \wedge \mathtt{B}) \vee (\mathtt{A} \wedge (\neg\mathtt{B})),$$

wobei sich die letzte Gleichung nach kurzer Überlegung aus der eingangs gegebenen Definition von "A aut B" ergibt.

Für das Folgende ist der richtige Umgang mit "$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$" entscheidend, so dass ich die wichtigsten Aspekte im Umgang mit "$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$-Aussagen" tabellarisch darlege.

Dabei spielen vor allem `2.II), 2.IV), 3.II), 3.III), 3.IV)` beweistechnisch eine große Rolle, denn sie erlauben es, aus einer "$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$-Aussage" und der Wahrheit einer der beteiligten Aussagen auf die Falschheit der anderen involvierten Aussage(n) zu schließen. In `2.VI), 3.V)` wird gesagt, was zu tun ist, um eine "$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$-Aussage" zu beweisen.

2.I) “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{A}$” sind äquivalent.

2.II) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\mathtt{A}$” folgt “$\neg\mathtt{B}$” .

2.III) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\neg\mathtt{A}$” folgt “$\mathtt{B}$” .

2.IV) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\mathtt{B}$” folgt “$\neg\mathtt{A}$” .

2.V) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\neg\mathtt{B}$” folgt “$\mathtt{A}$” .

2.VI) “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\mathtt{A} \Leftrightarrow (\neg\mathtt{B})$” und “$(\neg\mathtt{A}) \Leftrightarrow \mathtt{B}$ sind äquivalent.

2.VII) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” folgt “$\mathtt{A} \vee \mathtt{B}$” .

3.I) “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$” und “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$” und “$\mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{A}$” und “$\mathtt{C}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$” und “$\mathtt{C}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{A}$” sind äquivalent.

3.II) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$” und “$\mathtt{A}$” folgt “$\neg\mathtt{B}$” und “$\neg\mathtt{C}$” .

3.III) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$” und “$\mathtt{B}$” folgt “$\neg\mathtt{A}$” und “$\neg\mathtt{C}$” .

3.IV) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$” und “$\mathtt{C}$” folgt “$\neg\mathtt{A}$” und “$\neg\mathtt{B}$” .

3.V) “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$”
und “$(\mathtt{A} \vee \mathtt{B} \vee \mathtt{C}) \wedge (\mathtt{A} \Rightarrow (\neg\mathtt{B})) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow (\neg\mathtt{C})) \wedge (\mathtt{C} \Rightarrow (\neg\mathtt{A}))$”
sind äquivalent.

3.VI) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$” folgt “$\mathtt{A} \vee \mathtt{B} \vee \mathtt{C}$” .

Das für zwei und drei Aussagen definierte ausschließende “$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$” kann auf vier, fünf, ... endlich viele (aber mindestens vier) Aussagen erweitert werden.

Bemerkung $\overset{\star}{\mathtt{aut}}$ und “tertium non datur” .

Klarer Weise gilt auf Grund des logischen “tertium non datur” für jede Aussage “*Aussage*” die Aussage “*Aussage* $\overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \neg($*Aussage*$)$” . Zum Beispiel sind “$(x \in E)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x \notin E)$” und “$(x$ Menge$)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x$ Unmenge$)$” gültig.

Bemerkung exc.

Die ausschließende “oder ” Verknüpfung $\overset{\star}{\mathtt{aut}}$ hat die mitunter unerwünschte Eigenschaft, dass aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \ldots\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{Z}$” - hier sind mindestens zwei Aussagen involviert - stets “$\mathtt{A} \vee \ldots \vee \mathtt{Z}$” folgt. Ein ausschließendes “oder ” , das diese Eigenschaft nicht hat, ist in zweistelliger Weise für Aussagen $\mathtt{A}, \mathtt{B}$ durch

$$(\neg\mathtt{A}) \vee (\neg\mathtt{B})$$

und in dreistelliger Weise für Aussagen $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}$ durch

$$((\neg \mathtt{A}) \wedge (\neg \mathtt{B})) \vee ((\neg \mathtt{B}) \wedge (\neg \mathtt{C})) \vee ((\neg \mathtt{C}) \wedge (\neg \mathtt{A}))$$

gegeben, Verallgemeinerungen für vier oder mehr Aussagen liegen auf der Hand.

Für diese ausschließenden "oder-Verknüpfungen" wird eine neue Notation eingeführt:

$$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B} :\Leftrightarrow (\neg \mathtt{A}) \vee (\neg \mathtt{B}),$$

$$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C} :\Leftrightarrow ((\neg \mathtt{A}) \wedge (\neg \mathtt{B})) \vee ((\neg \mathtt{B}) \wedge (\neg \mathtt{C})) \vee ((\neg \mathtt{C}) \wedge (\neg \mathtt{A})),$$

und in ähnlicher Weise für vier oder mehr Aussagen.

Es folgen einige Regeln im Umgang mit "$\mathtt{exc}$" :

`2e.I)` "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}$" und "$\mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{A}$" sind äquivalent.

`2e.II)` "$(\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}) \wedge ((\neg \mathtt{A})\ \mathtt{exc}\ (\neg \mathtt{B}))$" und "$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$" sind äquivalent.

`2e.III)` Aus "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}$" und "$\mathtt{A}$" folgt "$\neg \mathtt{B}$" .

`2e.IV)` Aus "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}$" und "$\mathtt{B}$" folgt "$\neg \mathtt{A}$" .

`2e.V)` "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}$" und "$\mathtt{A} \Rightarrow (\neg \mathtt{B})$" und "$\mathtt{B} \Rightarrow (\neg \mathtt{A})$" sind äquivalent.

`2e.VI)` Aus "$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}$" folgt "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}$" .

`3e.I)` "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}$" und "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}$" und "$\mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}$" und "$\mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{A}$" und "$\mathtt{C}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}$" und "$\mathtt{C}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{A}$" sind äquivalent.

`3e.II)` Aus "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}$" und "$\mathtt{A}$" folgt "$\neg \mathtt{B}$" und "$\neg \mathtt{C}$" .

`3e.III)` Aus "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}$" und "$\mathtt{B}$" folgt "$\neg \mathtt{C}$" und "$\neg \mathtt{A}$" .

`3e.IV)` Aus "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}$" und "$\mathtt{C}$" folgt "$\neg \mathtt{A}$" und "$\neg \mathtt{B}$" .

`3e.V)` "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}$" und "$(\mathtt{A} \Rightarrow (\neg \mathtt{B})) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow (\neg \mathtt{C})) \wedge (\mathtt{C} \Rightarrow (\neg \mathtt{A}))$" sind äquivalent.

`3e.VI)` Aus "$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}$" folgt "$\mathtt{A}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{B}\ \mathtt{exc}\ \mathtt{C}$" .

121-1. Es gilt $(x \in E)$ `exc` $(x = \mathcal{U})$, also schließen sich mit anderen Worten die Aussagen "$x \in E$" und "$x = \mathcal{U}$" einander aus:

121-1(Satz)

$$(x \in E)\ \texttt{exc}\ (x = \mathcal{U}).$$

Beweis **121-1**

`1:` Es gilt:

$$(x \in E) \wedge (x = \mathcal{U}) \vee (x \notin E) \vee (x \neq \mathcal{U}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in E) \wedge (x = \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in E \ldots$" folgt via **94-1**: $x \neq \mathcal{U}$.

`3:` Es gilt 2"$x \neq \mathcal{U}$". Es gilt `1.1.Fall`"$\ldots x = \mathcal{U}$". Ex falso quodlibet folgt: $(x \notin E) \vee (x \neq \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $(x \notin E) \vee (x \neq \mathcal{U})$.

In beiden Fällen gilt: $(x \notin E) \vee (x \neq \mathcal{U})$.

Konsequenz: $(x \in E)\ \texttt{exc}\ (x = \mathcal{U})$.

□

121-2. Die nun via $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ eingeführte Klasse entpuppt sich umgehend als $E\Delta C$:

121-2(Definition)

$$\texttt{121.0}(x,y) = \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\}.$$

121-3. Wie angekündigt ist $\{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\omega \in y)\}$ die symmetrische KlassenDifferenz von x und y:

121-3(Satz)

$$x\Delta y = \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\omega \in y)\}.$$

121-2(Def) $\{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\omega \in y)\}$.

Beweis **121-3**

`Thema1.1` $\alpha \in x\Delta y$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x\Delta y$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x\Delta y$"
folgt via **5-25**:
$$((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y)).$$

`3:` Aus `2.2`
folgt: $((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y)) \vee ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y))$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\alpha \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\alpha \in y)$.

`5:` Aus `2.1`"α Menge" und
aus `4`"$(\alpha \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\alpha \in y)$"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\omega \in y)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x\Delta y) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\omega \in y)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$x\Delta y \subseteq \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\omega \in y)\}$"

...

Beweis **121-3** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\}$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\}$"
folgt: $(\alpha \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\alpha \in y)$.

3: Aus 2
folgt: $((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y)) \vee ((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y))$.

4: Aus 3
folgt: $((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y))$.

5: Aus 4 "$((\alpha \in x) \wedge (\alpha \notin y)) \vee ((\alpha \notin x) \wedge (\alpha \in y))$"
folgt via **5-25**: $\alpha \in x\Delta y$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\}) \Rightarrow (\alpha \in x\Delta y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\} \subseteq x\Delta y\text{”}}$

2: Aus A1 gleich "$x\Delta y \subseteq \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\}$" und
aus A2 gleich "$\{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\} \subseteq x\Delta y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x\Delta y = \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (\omega \in y)\}$.

□

121-4. Die Aussagen "$p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q$" und "$p = q$" schließen einander aus, ohne dass eine dieser Aussagen zutreffen müsste:

121-4(Satz)

$$(p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q) \;\texttt{exc}\; (p = q).$$

Beweis **121-4**

1: Via **41-3** gilt: $(p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q) \Rightarrow (p \neq q).$

2: Aus 1 folgt: $(p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q) \Rightarrow (\neg(p = q)).$

3: Aus 2 folgt: $(p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q) \;\texttt{exc}\; (p = q).$

□

121-5. Falls p und q Elemente einer M_Kette sind, dann schließen sich die Aussagen “$\neg(p\_M\_q)$” und “$\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$” aus:

> **<u>121-5(Satz)</u>**
>
> *Aus “K ist M_Kette” und “$p \in K$” und “$q \in K$”*
>
> *folgt* “$(\neg(p\_M\_q))\ \mathtt{exc}\ (\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p))$”.

<u>Beweis **121-5**</u> `VS` gleich $(K \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (p \in K) \wedge (q \in K)$.

`1`: Aus `VS` gleich “K ist M_Kette...”,
aus `VS` gleich “$\ldots p \in K \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots q \in K$”
folgt via **41-9**: $(p\_M\_q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`2`: Aus `1`
folgt: $(\neg(\neg(p\_M\_q))) \vee (\neg(\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)))$.

`3`: Aus `2`
folgt: $(\neg(p\_M\_q))\ \mathtt{exc}\ (\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p))$.

□

121-6. Das nachfolgenden Beispiel vorwegnehmend wird hier fest gestellt, dass in **121-5** die Verknüpfung “$\mathtt{exc}$” nicht durch “$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$” ersetzt werden kann. Damit ist auch gezeigt, dass “$\mathtt{exc}$” und “$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$” unterschiedliche Verknüpfungen sind:

121-6.Bemerkung

Die Aussage
“$(K$ ist M_Kette$) \wedge (p \in K) \wedge (q \in K)$
$$\Rightarrow ((\neg(p\_M\_q))\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)))$$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

121-7. Mit dem folgenden Beispiel wird belegt, dass für p, q in einer M_Kette nicht notwendiger Weise $(\neg(p\_M\_q))$ $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ $(\neg(q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p))$ gilt:

<u>121-7.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $M = \{(p, p), (q, q), (p, q), (q, p)\}$.

$\rightarrow$) $K = \{p, q\}$.

Dann folgt:

a) K ist M_Kette.

b) $p \in K$.

c) $q \in K$.

d) p_M_q.

e) $q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$.

f) $(\neg(p\_M\_q))$ exc $(\neg(q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p))$.

g) $\neg((\neg(p\_M\_q))$ $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ $(\neg(q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p)))$.

Ad g) Es gilt p_M_q *und* $q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p$. Hieraus ergibt sich nach doppelter Verneinung die Aussage $\neg((\neg(p\_M\_q)) \vee (\neg(q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p)))$. Somit kann auch nicht $(\neg(p\_M\_q))$ $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ $(\neg(q\_\overset{\textbf{ir}}{M}\_p))$ gelten.

121-8. Falls M antiSymmetrisch ist, schließen sich - unter anderem - die Aussgen $p_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}q$ und $p=q$ und $q_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}p$ aus:

121-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) M *antiSymmetrisch.*

Dann folgt:

a) $(p_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}q)$ `exc` $(p=q)$ `exc` $(q_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}p)$.

b) $(p{\_}M{\_}q)$ `exc` $(q_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}p)$.

c) $(p_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{\_}q)$ `exc` $(q{\_}M{\_}p)$.

<u>Beweis **121-8**</u> `a)`

`1.1`: Via **41-3** gilt: $(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q) \Rightarrow (p \neq q)$.

`2`: Aus `1.1` folgt:

`A1`	“$(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q) \Rightarrow (\neg(p = q))$”

`1.2`: Via **41-5** gilt:

`A2`	“$(p = q) \Rightarrow (\neg(q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p))$”

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p$

Aus $\rightarrow$) “M ist antiSymmetrisch” und

aus `Thema1.3`“$q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p$”

folgt via **46-1**: $\neg(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q)$.

Ergo `Thema1.3`:

`A3`	“$(q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p) \Rightarrow (\neg(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q))$”

`2`: Aus `A1` gleich “$(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q) \Rightarrow (\neg(p = q))$”,

aus `A2` gleich “$(p = q) \Rightarrow (\neg(q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p))$” und

aus `A3` gleich “$(q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p) \Rightarrow (\neg(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q))$”

folgt: $(p_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-q)$ `exc` $(p = q)$ `exc` $(q_- \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_-p)$.

Beweis **121-8** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	p_M_q.
Aus →) “M ist antiSymmetrisch” und aus `Thema1` “p_M_q” folgt via **46-1**:	$\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

Ergo `Thema1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(p\_M\_q) \Rightarrow (\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p))\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$(p\_M\_q) \Rightarrow (\neg(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p))$”
folgt: (p_M_q) `exc` $(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$.
Aus →) “M ist antiSymmetrisch” und aus `Thema1` “$p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$” folgt via **46-1**:	$\neg(q\_M\_p)$.

Ergo `Thema1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \Rightarrow (\neg(q\_M\_p))\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \Rightarrow (\neg(q\_M\_p))$”
folgt: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)$ `exc` (q_M_p).

□

121-9. Aussage **121-8** kann für Elemente einer M_Kette verschärft werden:

121-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ M *antiSymmetrisch.*

$\rightarrow)$ K *ist* M*_Kette.*

$\rightarrow)$ $p \in K$.

$\rightarrow)$ $q \in K$.

Dann folgt:

a) $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (p = q)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

b) $(p\_M\_q)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

c) $(q\_M\_p)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)$.

Beweis **121-9** a)

1.1: Aus $\rightarrow)$ "M antiSymmetrisch"
folgt via **121-8**: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)\ \mathtt{exc}\ (p = q)\ \mathtt{exc}\ (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "K ist M_Kette",
aus $\rightarrow)$ "$p \in K$" und
aus $\rightarrow)$ "$q \in K$"
folgt via **41-9**: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

2: Aus 1.1 "$(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)\ \mathtt{exc}\ (p = q)\ \mathtt{exc}\ (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$" und
aus 1.2 "$(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q) \vee (p = q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$"
folgt: $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (p = q)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

Beweis **121-9** `b)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$) “ M antiSymmetrisch ”
folgt via **121-8**: (p_M_q) `exc` $(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) “ K ist M_Kette ” ,
aus $\rightarrow$) “ $p \in K$ ” und
aus $\rightarrow$) “ $q \in K$ ”
folgt via **41-9**: $(p\_M\_q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`2:` Aus `1.1` “ (p_M_q) `exc` $(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$ ” und
aus `1.2` “ $(p\_M\_q) \vee (q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$ ”
folgt: (p_M_q) $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ $(q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p)$.

`c)`

Aus $\rightarrow$) “ M antiSymmetrisch ” ,
aus $\rightarrow$) “ K ist M_Kette ” ,
aus $\rightarrow$) “ $q \in K$ ” und
aus $\rightarrow$) “ $p \in K$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: (q_M_p) $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ $(p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q)$.

$\square$

Bemerkung vierstelliges $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ und vierstelliges exc.

Das vierstellige $\overset{\star}{\texttt{aut}}$ und das vierstellige $\texttt{exc}$ wird für Aussagen $\texttt{A},\texttt{B},\texttt{C},\texttt{D}$ durch

$$\begin{aligned}\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D} :\Leftrightarrow & ((\neg\texttt{A})\wedge(\neg\texttt{B})\wedge(\neg\texttt{C})\wedge\texttt{D})\\ & \vee((\neg\texttt{A})\wedge(\neg\texttt{B})\wedge\texttt{C}\wedge(\neg\texttt{D}))\vee((\neg\texttt{A})\wedge\texttt{B}\wedge(\neg\texttt{C})\wedge(\neg\texttt{D}))\\ & \vee(\texttt{A}\wedge(\neg\texttt{B})\wedge(\neg\texttt{C})\wedge(\neg\texttt{D}))\end{aligned}$$

und durch

$$\begin{aligned}\texttt{A exc B exc C exc D} :\Leftrightarrow & ((\neg\texttt{A})\wedge(\neg\texttt{B})\wedge(\neg\texttt{C}))\\ & \vee((\neg\texttt{A})\wedge(\neg\texttt{B})\wedge(\neg\texttt{D}))\vee((\neg\texttt{A})\wedge(\neg\texttt{C})\wedge(\neg\texttt{D}))\\ & \vee((\neg\texttt{B})\wedge(\neg\texttt{C})\wedge(\neg\texttt{D}))\end{aligned}$$

festgelegt.

4a.I) Der Wahrheitswert von "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" hängt nicht von der Reihenfolge ab, in der die Aussagen $\texttt{A},\texttt{B},\texttt{C},\texttt{D}$ aufscheinen, so dass zum Beispiel die Aussagen "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" und "$\texttt{D}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}$" äquivalent sind.

4a.II) Aus "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" und "$\texttt{A}$" folgt "$\neg\texttt{B}$" und "$\neg\texttt{C}$" und "$\neg\texttt{D}$".

4a.III) Aus "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" und "$\texttt{B}$" folgt "$\neg\texttt{A}$" und "$\neg\texttt{C}$" und "$\neg\texttt{D}$".

4a.IV) Aus "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" und "$\texttt{C}$" folgt "$\neg\texttt{A}$" und "$\neg\texttt{B}$" und "$\neg\texttt{D}$".

4a.V) Aus "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" und "$\texttt{D}$" folgt "$\neg\texttt{A}$" und "$\neg\texttt{B}$" und "$\neg\texttt{C}$".

4a.VI) "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" und "$(\texttt{A}\vee\texttt{B}\vee\texttt{C}\vee\texttt{D})\wedge(\texttt{A}\Rightarrow(\neg\texttt{B}))\wedge(\texttt{A}\Rightarrow(\neg\texttt{C}))\wedge(\texttt{B}\Rightarrow(\neg\texttt{C}))\wedge(\texttt{B}\Rightarrow(\neg\texttt{D}))\wedge(\texttt{C}\Rightarrow(\neg\texttt{D}))\wedge(\texttt{D}\Rightarrow(\neg\texttt{A}))$" sind äquivalent.

4a.VII) Aus "$\texttt{A}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{B}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{C}\ \overset{\star}{\texttt{aut}}\ \texttt{D}$" folgt "$\texttt{A}\vee\texttt{B}\vee\texttt{C}\vee\texttt{D}$"

4e.I) Der Wahrheitswert von "$\texttt{A exc B exc C exc D}$" hängt nicht von der Reihenfolge ab, in der die Aussagen $\texttt{A},\texttt{B},\texttt{C},\texttt{D}$ aufscheinen, so dass zum Beispiel die Aussagen "$\texttt{A exc B exc C exc D}$" und "$\texttt{D exc B exc A exc C}$" äquivalent sind.

4e.II) Aus "$\texttt{A exc B exc C exc D}$" und "$\texttt{A}$" folgt "$\neg\texttt{B}$" und "$\neg\texttt{C}$" und "$\neg\texttt{D}$".

4e.III) Aus "$\texttt{A exc B exc C exc D}$" und "$\texttt{B}$" folgt "$\neg\texttt{A}$" und "$\neg\texttt{C}$" und "$\neg\texttt{D}$".

4e.IV) Aus "$\texttt{A exc B exc C exc D}$" und "$\texttt{C}$" folgt "$\neg\texttt{A}$" und "$\neg\texttt{B}$" und "$\neg\texttt{D}$".

4e.V) Aus “$\mathtt{A}$ exc $\mathtt{B}$ exc $\mathtt{C}$ exc $\mathtt{D}$” und “$\mathtt{D}$” folgt “$\neg\mathtt{A}$” und “$\neg\mathtt{B}$” und “$\neg\mathtt{C}$” .

4e.VI) “$\mathtt{A}$ exc $\mathtt{B}$ exc $\mathtt{C}$ exc $\mathtt{D}$” und “$(\mathtt{A} \Rightarrow (\neg\mathtt{B})) \wedge (\mathtt{A} \Rightarrow (\neg\mathtt{C})) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow (\neg\mathtt{C})) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow (\neg\mathtt{D})) \wedge (\mathtt{C} \Rightarrow (\neg\mathtt{D})) \wedge (\mathtt{D} \Rightarrow (\neg\mathtt{A}))$” sind äquivalent.

4e.VII) Aus “$\mathtt{A}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{B}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{C}\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ \mathtt{D}$” folgt “$\mathtt{A}$ exc $\mathtt{B}$ exc $\mathtt{C}$ exc $\mathtt{D}$” .

KleinerGleichRelation und $\overset{\star}{\texttt{aut}}, \texttt{exc}$.

Ersterstellung: 25/02/10 **Letzte Änderung: 21/04/12**

122-1. Für *beliebige* Klassen x, y gilt - unter anderem - $(x < y)$ `exc` $(x = y)$ `exc` $(y < x)$:

122-1(Satz)

a) $(x < y)$ `exc` $(x = y)$ `exc` $(y < x)$.

b) $(x \leq y)$ `exc` $(y < x)$.

c) $(x < y)$ `exc` $(y \leq x)$.

d) $(x < 0)$ `exc` $(x = 0)$ `exc` $(0 < x)$.

e) $(x \leq 0)$ `exc` $(0 < x)$.

f) $(x < 0)$ `exc` $(0 \leq x)$.

≤-Notation.

<u>Beweis **122-1**</u>

`1:` Via **AAVII** gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`3.a):` Aus `2`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **121-8**: $(x < y)$ `exc` $(x = y)$ `exc` $(y < x)$.

`3.b):` Aus `2`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **121-8**: $(x \leq y)$ `exc` $(y < x)$.

`3.c):` Aus `2`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **121-8**: $(x < y)$ `exc` $(y \leq x)$.

`3.d):` Aus `2`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **121-8**: $(x < 0)$ `exc` $(x = 0)$ `exc` $(0 < x)$.

`3.e):` Aus `2`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **121-8**: $(x \leq 0)$ `exc` $(0 < x)$.

`3.1:` Aus `2`“$\leq$ antiSymmetrisch”
folgt via **121-8**: $(0 \leq x)$ `exc` $(x < 0)$.

`4.f):` Aus `3.1`
folgt: $(x < 0)$ `exc` $(0 \leq x)$.

$\square$

122-2. Aus $x, y \in \mathbb{S}$ folgt - unter anderem - $(x < y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (x = y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y < x)$:

122-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $(x < y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (x = y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y < x)$.

b) $(x < y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y \le x)$.

c) $(x \le y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y < x)$.

$\le$-Notation

<u>Beweis</u> **122-2** `a)`

`1.1:` Via **122-1** gilt: $(x < y)$ `exc` $(x = y)$ `exc` $(y < x)$.

`1.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$.

`2:` Aus `1.1` "$(x < y)$ `exc` $(x = y)$ `exc` $(y < x)$" und
aus `1.2` "$(x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$"
folgt: $(x < y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (x = y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y < x)$.

`b)`

`1.1:` Via **122-1** gilt: $(x < y)$ `exc` $(y \leq x)$.

`1.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < y) \vee (y \leq x)$.

`2:` Aus `1.1` "$(x < y)$ `exc` $(y \leq x)$" und
aus `1.2` "$(x < y) \vee (y \leq x)$"
folgt: $(x < y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y \leq x)$.

`c)`

`1.1:` Via **122-1** gilt: $(x \leq y)$ `exc` $(y < x)$.

`1.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x \leq y) \vee (y < x)$.

`2:` Aus `1.1` "$(x \leq y)$ `exc` $(y < x)$" und
aus `1.2` "$(x \leq y) \vee (y < x)$"
folgt: $(x \leq y) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y < x)$.

□

122-3. Aus $x \in \mathbb{S}$ folgt - unter anderem - $(x < 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (x = 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 < x)$:

122-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $(x < 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (x = 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 < x)$.

b) $(x < 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 \leq x)$.

c) $(x \leq 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 < x)$.

≤-Notation.

Beweis **122-3**

1: Via **95-11** gilt: $0 \in \mathbb{S}$.

2.a): Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{S}$" und
aus 1 "$0 \in \mathbb{S}$"
folgt via **122-2**: $(x < 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (x = 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 < x)$.

2.b): Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{S}$" und
aus 1 "$0 \in \mathbb{S}$"
folgt via **122-2**: $(x < 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 \leq x)$.

2.1: Aus 1 "$0 \in \mathbb{S}$" und
aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **122-2**: $(0 \leq x) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (x < 0)$.

3.c): Aus 2.1
folgt: $(x < 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 \leq x)$.

□

122-4. Ein Klasse ist *ausschließlicher Weise* eine reelle Zahl oder gleich nan oder gleich $+\infty$ oder gleich $-\infty$. Ähnlich gilt, dass jede Klasse *ausschließlicher Weise* eine sreelle Zahl oder gleich nan ist:

122-4(Satz)

a) $(x \in \mathbb{R})$ $\mathtt{exc}$ $(x = \mathsf{nan})$ $\mathtt{exc}$ $(x = +\infty)$ $\mathtt{exc}$ $(x = -\infty)$.

b) $(x \in \mathbb{S})$ $\mathtt{exc}$ $(x = \mathsf{nan})$.

Beweis **122-4** a)

`Thema1.1` $x \in \mathbb{R}$.

2: Aus `Thema1.1` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $x \neq \mathsf{nan}$.

3: Aus 2
folgt: $\neg(x = \mathsf{nan})$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\neg(x = \mathsf{nan}))$"

`Thema1.2` $x \in \mathbb{R}$.

2: Aus `Thema1.2` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $x \neq +\infty$.

3: Aus 2
folgt: $\neg(x = +\infty)$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x \neq +\infty)$"

...

Beweis **122-4** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $x = \mathsf{nan}$.

2: Via **AAI** gilt: $\mathsf{nan} \neq +\infty$.

3: Aus Thema1.3"$x = \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{nan} \neq +\infty$"
folgt: $x \neq +\infty$.

4: Aus 3
folgt: $\neg(x = +\infty)$.

Ergo Thema1.3: A3 | "$(x = \mathsf{nan}) \Rightarrow (\neg(x = +\infty))$"

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$ $x = \mathsf{nan}$.

2: Via **AAI** gilt: $\mathsf{nan} \neq -\infty$.

3: Aus Thema1.4"$x = \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{nan} \neq -\infty$"
folgt: $x \neq -\infty$.

4: Aus 3
folgt: $\neg(x = -\infty)$.

Ergo Thema1.4: A4 | "$(x = \mathsf{nan}) \Rightarrow (\neg(x = -\infty))$"

...

<u>Beweis</u> **122-4** `a)` ...

`Thema1.5`	$x = +\infty.$
`2:` Via **107-6** gilt:	$-\infty \neq +\infty.$
`3:` Aus 2"$-\infty \neq +\infty$" und aus `Thema1.5`"$x = +\infty$" folgt:	$-\infty \neq x.$
`4:` Aus 3 folgt:	$x \neq -\infty.$
`5:` Aus 4 folgt:	$\neg(x = -\infty).$

Ergo `Thema1.5`: `A5` | "$(x = +\infty) \Rightarrow (\neg(x = -\infty))$"

`Thema1.6`	$x = -\infty.$
`2:` Aus `Thema1.6`"$x = -\infty$" folgt via **95-18**:	$x \notin \mathbb{R}.$
`3:` Aus 2 folgt:	$\neg(x \in \mathbb{R}).$

Ergo `Thema1.6`: `A6` | "$(x = -\infty) \Rightarrow (\neg(x \in \mathbb{R}))$"

`2:` Aus `A1` gleich "$(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\neg(x = \mathsf{nan}))$",
aus `A2` gleich "$(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\neg(x = +\infty))$",
aus `A3` gleich "$(x = \mathsf{nan}) \Rightarrow (\neg(x = +\infty))$",
aus `A4` gleich "$(x = \mathsf{nan}) \Rightarrow (\neg(x = -\infty))$",
aus `A5` gleich "$(x = +\infty) \Rightarrow (\neg(x = -\infty))$" und
aus `A6` gleich "$(x = -\infty) \Rightarrow (\neg(x \in \mathbb{R}))$"
folgt: $(x \in \mathbb{R})\ \texttt{exc}\ (x = \mathsf{nan})\ \texttt{exc}\ (x = +\infty)\ \texttt{exc}\ (x = -\infty).$

Beweis **122-4** `b)`

`Thema1` $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `Thema1` "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-20**: $x \neq \mathsf{nan}$.

`3:` Aus 2
folgt: $\neg(x = \mathsf{nan})$.

Ergo `Thema1`: $(x \in \mathbb{S}) \Rightarrow (\neg(x = \mathsf{nan}))$.

Konsequenz: $(x \in \mathbb{S})\ \mathtt{exc}\ (x = \mathsf{nan})$.

$\square$

122-5. Für treelle Zahlen werden aus den "$\mathtt{exc}$-Aussagen" von **122-4** jeweils "$\overset{\star}{\mathtt{aut}}$-Aussagen" :

122-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $(x \in \mathbb{R})\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = \mathsf{nan})\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = +\infty)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = -\infty)$.

b) $(x \in \mathbb{S})\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = \mathsf{nan})$.

Beweis **122-5** a)

1: Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

2: Via **122-4** gilt: $(x \in \mathbb{R})\ \mathtt{exc}\ (x = \mathsf{nan})\ \mathtt{exc}\ (x = +\infty)\ \mathtt{exc}\ (x = -\infty)$.

3: Aus 2"$(x \in \mathbb{R})\ \mathtt{exc}\ (x = \mathsf{nan})\ \mathtt{exc}\ (x = +\infty)\ \mathtt{exc}\ (x = -\infty)$" und
aus 1"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$"
folgt: $(x \in \mathbb{R})\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = \mathsf{nan})\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = +\infty)\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = -\infty)$.

b)

1: Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

2: Via **122-4** gilt: $(x \in \mathbb{S})\ \mathtt{exc}\ (x = \mathsf{nan})$.

3: Aus 2"$(x \in \mathbb{S})\ \mathtt{exc}\ (x = \mathsf{nan})$" und
aus 1"$(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$"
folgt: $(x \in \mathbb{S})\ \overset{\star}{\mathtt{aut}}\ (x = \mathsf{nan})$.

$\square$

FSM1: FundamentalSatz Multiplikation1.
FSM-1: FundamentalSatz Multiplikation-1.
FSD1: FundamentalSatz Division1.

Ersterstellung: 30/04/10 **Letzte Änderung: 17/02/12**

123-1. Nun wird für alle Zahlen x die Aussage $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ nachgewiesen. Vorbereitend wird die Gültigkeit dieser Gleichungen für alle treellen Zahlen x bewiesen. Die vorliegenden Aussagen sind HilfsResultate auf dem Weg zum **FundamentalSatzes Multiplikation**1

123-1(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$".

b) *Aus* "x *Zahl*" *folgt* "$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **123-1** `a)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $1 \cdot x = x$.

`3:` Via **KGM** gilt: $1 \cdot x = x \cdot 1$.

`4:` Aus `2` "$1 \cdot x = x$" und
aus `3` "$1 \cdot x = x \cdot 1$"
folgt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Via **114-11** gilt: $1 \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot 1 = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.2.Fall` "$x = \mathsf{nan}$" und
aus `2` "$1 \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot 1 = \mathsf{nan}$"
folgt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

`1.3.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Via **114-11** gilt: $1 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$.

`3:` Aus `1.3.Fall` "$x = +\infty$" und
aus `2` "$1 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$"
folgt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

`1.4.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Via **114-11** gilt: $1 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 1 = -\infty$.

`3:` Aus `1.4.Fall` "$x = -\infty$" und
aus `2` "$1 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 1 = -\infty$"
folgt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

<u>Beweis **123-1**</u> `b)` `VS` gleich x Zahl.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}x \text{ Zahl})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \text{ Zahl})$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\mathsf{Re}x) \cdot 1 = \mathsf{Re}x$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\mathsf{Im}x) \cdot 1 = \mathsf{Im}x$.

`2.3:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Re}x) \cdot 0 = 0$.

`2.4:` Aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}x) \cdot 0 = 0$.

...

<u>Beweis **123-1**</u> `b)` `VS` gleich x Zahl.

...

`3:` $x \cdot 1$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}1)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}1))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}1)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}1))$$

$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot 1-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}1))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}1)+(\mathsf{Im}x)\cdot 1)$$

$$\stackrel{2.1}{=} ((\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}1))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}1)+(\mathsf{Im}x)\cdot 1)$$

$$\stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}1))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}1)+(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} ((\mathsf{Re}x)-(\mathsf{Im}x)\cdot 0)+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{2.4}{=} ((\mathsf{Re}x)-0)+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} ((\mathsf{Re}x)+0)+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{2.3}{=} (\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(0+(\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$$

$$\stackrel{1.3}{=} x.$$

`5:` Via **KGM** gilt: $1 \cdot x = x \cdot 1.$

`6:` Aus `5`“$1 \cdot x = x \cdot 1$” und
aus `4`“$x \cdot 1 = \ldots = x$”
folgt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$

□

123-2. Im **FundamentalSatz Multiplikation**1 wird fest gestellt, dass die vertrauten Gleichungen $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ genau dann gelten, wenn x Zahl oder $x = \mathcal{U}$:

> **123-2(Satz) (FSM1: FundamentalSatz Multiplikation1)**
>
> *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*
>
> `i)` $1 \cdot x = x$.
>
> `ii)` $x \cdot 1 = x$.
>
> `iii)` *"x Zahl" oder "$x = \mathcal{U}$".*
>
> ---
>
> `RECH`-**Notation**.

Beweis **123-2** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $1 \cdot x = x$.

`1`: Via **KGM** gilt: $1 \cdot x = x \cdot 1$.

`2`: Aus `1`"$1 \cdot x = x \cdot 1$" und
aus `VS` gleich "$1 \cdot x = x$"
folgt: $x \cdot 1 = x$.

Beweis **123-2** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x \cdot 1 = x.$

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}.$

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot 1 = \mathcal{U}.$

`3:` Aus `3`"$x \cdot 1 = \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot 1 = x$"
folgt: $x = \mathcal{U}.$

`4:` Aus `4`"$x = \mathcal{U}$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **123-1**: $1 \cdot x = x.$

`1.2.Fall` $x = \mathcal{U}.$

`2:` $1 \cdot x \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} 1 \cdot \mathcal{U} \stackrel{\textbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} x.$

`3:` Aus `2`
folgt: $1 \cdot x = x.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 \cdot x = x.$

□

123-3. Die Gleichungen $(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x$ gelten laut **FundamentalSatz Multiplikaiton**-1 *für alle Klassen* x:

123-3(Satz) (FSM-1**: FundamentalSatz Multiplikation**-1**)**

$$(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x.$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **123-3**

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall x Zahl.

2.1: Via **FSM**$-\cdot$ gilt: $(-1) \cdot x = -1 \cdot x$.

2.2: Aus 1.1.Fall"x Zahl"
folgt via **FSM**1: $1 \cdot x = x$.

3: Aus 2.2"$1 \cdot x = x$"
folgt: $-1 \cdot x = -x$.

4: Aus 2.1"$(-1) \cdot x = -1 \cdot x$" und
aus 3"$-1 \cdot x = -x$"
folgt: $(-1) \cdot x = -x$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $(-1) \cdot x = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

3: Aus 2.1"$(-1) \cdot x = \mathcal{U}$" und
aus 2.2"$-x = \mathcal{U}$"
folgt: $(-1) \cdot x = -x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: A1 | "$(-1) \cdot x = -x$"

2: Via **KGM** gilt: $(-1) \cdot x = x \cdot (-1)$.

3: Aus 2"$(-1) \cdot x = x \cdot (-1)$" und
aus A1 gleich "$(-1) \cdot x = -x$"
folgt: $(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x$.

□

123-4. Vorbereitend wird nun $\mathsf{rez}(1) = 1$ fest gestellt:

<u>123-4(Satz)</u>

$$\mathsf{rez}(1) = 1.$$

<u>Beweis **123-4**</u>

1: Aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **96-11**: $\mathsf{rez}(1)$ Zahl.

2: Aus 1"$\mathsf{rez}(1)$ Zahl"
folgt via **FSM**1: $\mathsf{rez}(1) \cdot 1 = \mathsf{rez}(1)$.

3: Aus **95-2**"$0 \neq 1$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(1) \cdot 1 = 1$.

4: Aus 2"$\mathsf{rez}(1) \cdot 1 = \mathsf{rez}(1)$" und
aus 3"$\mathsf{rez}(1) \cdot 1 = 1$"
folgt: $\mathsf{rez}(1) = 1$.

□

123-5. Die Gleichung $x : 1 = x$ trifft genau dann zu, wenn x Zahl oder $x = \mathcal{U}$:

123-5(Satz) (FSD1: FundamentalSatz Division1)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : 1 = x$.

`ii)` *"x Zahl" oder "$x = \mathcal{U}$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **123-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x : 1 = x$.

`1:` $x \cdot 1 \stackrel{\mathbf{123-4}}{=} x \cdot \mathsf{rez}(1) = x : 1 \stackrel{\texttt{VS}}{=} x.$

`2:` Aus `1` "$x \cdot 1 = \ldots = x$"
folgt via **FSM**1: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$"
folgt via **FSM**1: $x \cdot 1 = x.$

`2:` $x : 1 = x \cdot \mathsf{rez}(1) \stackrel{\mathbf{123-4}}{=} x \cdot 1 \stackrel{\texttt{1}}{=} x.$

`3:` Aus `2`
folgt: $x : 1 = x.$

□

123-6. Im **FSD**1 wird "$x : 1$" thematisiert. Nun geht es um "$1 : x$" :

123-6(Satz)

$$1 : x = \mathsf{rez}(x).$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **123-6**

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **96-11**: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt via **FSM**1: $1 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x)$.

`4:` Aus "$1 : x = 1 \cdot \mathsf{rez}(x)$" und
aus `3`"$1 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $1 : x = \mathsf{rez}(x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $1 : x = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1`"$1 : x = \mathcal{U}$" und
aus `2.2`"$\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$"
folgt: $1 : x = \mathsf{rez}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x = \mathsf{rez}(x)$.

□

123-7. Es folgt eine Re-Formulierung der rez betreffenden Teilen von **96-11**:

123-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Zahl.*

`ii)` $1 : x$ *Zahl.*

`iii)` $1 : x$ *Menge.*

`iv)` $1 : x \neq \mathcal{U}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **123-7**

`1:` Via **96-11** gilt:

$$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}).$$

`2:` Aus `1`“$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U})$” und
aus **123-6**“$1 : x = \mathsf{rez}(x)$”
folgt:

$$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (1 : x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (1 : x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (1 : x \neq \mathcal{U}).$$

$\square$

123-8. Es folgt eine Re-Formulierung der rez betreffenden Teile von **96-12**:

123-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \notin \mathbb{A}$.

`ii)` $1 : x \notin \mathbb{A}$.

`iii)` $1 : x$ *Unmenge.*

`iv)` $1 : x = \mathcal{U}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **123-8**

`1:` Via **96-12** gilt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}).$$

`2:` Aus `1`"$(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$" und aus **123-6**"$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (1 : x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (1 : x \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (1 : x = \mathcal{U}).$$

□

123-9. Es folgt eine Re-Formulierung der rez betreffenden Teile von **96-28**:

123-9(Satz)

a) $\mathsf{Re}(1 : x) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

b) $\mathsf{Im}(1 : x) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

c) $1 : x = \mathsf{Re}(1 : x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(1 : x)$.

d) $1 : x = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$.

e) $1 : x = 1 : ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

REIM.RECH-**Notation**.

Beweis **123-9**

1.a): Aus **96-28** "$\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$" und
aus **123-6** "$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

1.b): Aus **96-28** "$\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$" und
aus **123-6** "$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

1.c): Aus **96-28** "$\mathsf{rez}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x))$" und
aus **123-6** "$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $1 : x = \mathsf{Re}(1 : x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(1 : x)$.

1.d): Aus **96-28** "$\mathsf{rez}(x) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$" und
aus **123-6** "$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $1 : x = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$.

1.1: Aus **96-28** "$\mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$" und
aus **123-6** "$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $1 : x = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

2: Via **123-6** gilt: $1 : ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

3.e): Aus 1.1 "$1 : x = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$" und
aus 2 "$1 : ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$"
folgt: $1 : x = 1 : ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

□

123-10. Es folgt eine Re-Formulierung des rez betreffenden Teils von **98-21**:

123-10(Satz)

Aus "x Zahl" folgt "$0 \cdot (1 : x) = (1 : x) \cdot 0 = 0$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **123-10** `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **98-21**: $0 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot 0 = 0.$

`2:` Aus `1`"$0 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot 0 = 0$" und
aus **123-6**"$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $0 \cdot (1 : x) = (1 : x) \cdot 0 = 0.$

□

123-11. Nun wird $1 : x$ für einige Parameter x berechnet. Die Gleichung $1 : 0 = 0$ gilt gemäß **98-24**:

123-11(Satz)

a) $1 : 1 = 1$.

b) $1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

c) $1 : (+\infty) = 0$.

d) $1 : (-\infty) = 0$.

e) $1 : \mathsf{i} = -\mathsf{i}$.

f) $1 : (-\mathsf{i}) = \mathsf{i}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **123-11**

REIM-**Notation**.

---

a)

1: $$1 : 1 \stackrel{\mathbf{123-6}}{=} \mathsf{rez}(1) \stackrel{\mathbf{123-4}}{=} 1.$$

2: Aus 1 folgt: $$1 : 1 = 1.$$

b)

1: $$1 : \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{123-6}}{=} \mathsf{rez}(\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}.$$

2: Aus 1 folgt: $$1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$$

c)

1: $$1 : (+\infty) \stackrel{\mathbf{123-6}}{=} \mathsf{rez}(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0.$$

2: Aus 1 folgt: $$1 : (+\infty) = 0.$$

Beweis **123-11** d)

1: $$1:(-\infty) \overset{\textbf{123-6}}{=} \mathsf{rez}(-\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} 0.$$

2: Aus 1
folgt: $$1:(-\infty)=0.$$

e)

1: $$\begin{aligned} & 1:\mathsf{i} \\ \overset{\textbf{123-9}}{=} & (\mathsf{Re i}):\mathsf{ab2}(\mathsf{i})+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im i}):\mathsf{ab2}(\mathsf{i})) \\ \overset{\textbf{AAIII}}{=} & 0:\mathsf{ab2}(\mathsf{i})+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im i}):\mathsf{ab2}(\mathsf{i})) \\ \overset{\textbf{AAIII}}{=} & 0:\mathsf{ab2}(\mathsf{i})+\mathsf{i}\cdot((-1):\mathsf{ab2}(\mathsf{i})) \\ \overset{\textbf{99-16}}{=} & 0:1+\mathsf{i}\cdot((-1):1) \\ \overset{\textbf{98-24}}{=} & 0+\mathsf{i}\cdot((-1):1) \\ \overset{\textbf{98-12}}{=} & \mathsf{i}\cdot((-1):1) \\ = & \mathsf{i}\cdot((-1)\cdot\mathsf{rez}(1)) \\ \overset{\textbf{123-4}}{=} & \mathsf{i}\cdot((-1)\cdot 1) \\ \overset{\textbf{110-7}}{=} & \mathsf{i}\cdot(-1) \\ \overset{\textbf{FSM-1}}{=} & -\mathsf{i}. \end{aligned}$$

2: Aus 1
folgt: $$1:\mathsf{i}=-\mathsf{i}.$$

Beweis **123-11** `f)`

`1:`

$$
\begin{aligned}
& 1 : (-\mathsf{i}) \\
\overset{\mathbf{123-9}}{=}\ & (\mathsf{Re}(-\mathsf{i})) : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i}) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i})) \\
\overset{\mathbf{96-27}}{=}\ & (-\mathsf{Rei}) : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i}) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i})) \\
\overset{\mathbf{AAIII}}{=}\ & (-0) : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i}) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i})) \\
\overset{\mathbf{98-15}}{=}\ & 0 : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i}) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : \mathsf{ab2}(-\mathsf{i})) \\
\overset{\mathbf{110-9}}{=}\ & 0 : \mathsf{ab2}(\mathsf{i}) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : \mathsf{ab2}(\mathsf{i})) \\
\overset{\mathbf{99-16}}{=}\ & 0 : 1 + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : 1) \\
\overset{\mathbf{98-24}}{=}\ & 0 + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : 1) \\
\overset{\mathbf{98-12}}{=}\ & \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(-\mathsf{i})) : 1) \\
\overset{\mathbf{96-27}}{=}\ & \mathsf{i} \cdot ((-(-\mathsf{Imi})) : 1) \\
\overset{\mathbf{100-4}}{=}\ & \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Imi}) : 1) \\
\overset{\mathbf{AAIII}}{=}\ & \mathsf{i} \cdot (1 : 1) \\
\overset{\text{a)}}{=}\ & \mathsf{i} \cdot 1 \\
\overset{\mathbf{114-11}}{=}\ & \mathsf{i}.
\end{aligned}
$$

`2:` Aus `1` folgt: $1 : (-\mathsf{i}) = \mathsf{i}.$

□

123-12. Nun wird eine Re-Formulierung des rez betreffenden Teils von **104-3** gegeben:

<u>**123-12(Satz)**</u>

Aus "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" folgt "$1 : x = 0$" oder "$1 : x = \mathsf{nan}$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **123-12**</u> `VS` gleich $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-3**: $(\mathsf{rez}(x) = 0) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1`"$(\mathsf{rez}(x) = 0) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathsf{nan})$" und
aus **123-6**"$1 : x = \mathsf{rez}(x)$"
folgt: $(1 : x = 0) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

$\square$

Falls f Funktion, dann $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$ oder $= \mathcal{U}$.
Falls $f : D \to B$, dann $f(x) \in B$ oder $= \mathcal{U}$.

Ersterstellung: 07/05/10 **Letzte Änderung: 17/02/12**

124-1. Falls f eine Funktion ist, dann gilt $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$ oder $f(x)$ ist gleich dem Universum:

124-1(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$" oder "$f(x) = \mathcal{U}$".

Beweis **124-1**

1: Es gilt: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \vee (x \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus →) "f Funktion" und aus `1.1.Fall` "$x \in \mathsf{dom}\, f$" folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

3: Aus 2 folgt: $(f(x) \in \mathsf{ran}\, f) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathsf{dom}\, f$" folgt via **17-4**: $f(x) = \mathcal{U}$.

3: Aus 2 folgt: $(f(x) \in \mathsf{ran}\, f) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(f(x) \in \mathsf{ran}\, f) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

□

124-2. Falls $f : D \to B$, dann $f(x) \in B$ oder $f(x) = \mathcal{U}$:

124-2(Satz)

Aus “$f : D \to B$” folgt “$f(x) \in B$” oder “$f(x) = \mathcal{U}$”.

Beweis **124-2**

`1.1:` Aus →) “$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

`1.2:` Aus →) “$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

`2:` Aus `1.1` “f Funktion”
folgt via **124-1**: $(f(x) \in \mathsf{ran}\, f) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

`3:` Aus `2.1.Fall` “$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$” und
aus `1.2` “$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$”
folgt via **0-4**: $f(x) \in B$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(f(x) \in B) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

`2.2.Fall` $f(x) = \mathcal{U}$.

Aus `2.2.Fall`
folgt: $(f(x) \in B) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(f(x) \in B) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

□

Falls $\Box$ Algebra in A, dann $p\_\Box\_q \in A$ oder $= \mathcal{U}$.
Falls $\Box$ Algebra in A, dann $p\_\Box\_q \in A$ oder $q\_\Box\_p = \mathcal{U}$.

Ersterstellung: 07/05/10 **Letzte Änderung: 17/02/12**

125-1. Falls $\square$ eine Algebra in A ist, dann gilt $p\_\square\_q \in A$ oder $p\_\square\_q = \mathcal{U}$:

125-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\square$ *Algebra in* A.

Dann folgt:

a) "$p\_\square\_q \in A$" *oder* "$p\_\square\_q = \mathcal{U}$".

b) "$p\_\square\_q \in A$" *oder* "$q\_\square\_p = \mathcal{U}$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **125-1**</u>

`1:` Aus →) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-5(Def)**: $\Box : A \times A \to A.$

`2:` Aus `1`"$\Box : A \times A \to A$"
folgt via **124-2**: $(\Box(p, q) \in A) \vee (\Box(p, q) = \mathcal{U}).$

`3.a):` Aus `2`
folgt: $(p\_\Box\_q \in A) \vee (p\_\Box\_q = \mathcal{U}).$

`Fallunterscheidung`

`3.a).1.Fall` $p\_\Box\_q \in A.$

Aus `3.a).1.Fall`
folgt: $(p\_\Box\_q \in A) \vee (q\_\Box\_p = \mathcal{U}).$

`3.a).2.Fall` $p\_\Box\_q = \mathcal{U}.$

`4:` Aus `3.a).2.Fall`"$p\_\Box\_q = \mathcal{U}$"
folgt via **93-13**: $q\_\Box\_p = \mathcal{U}.$

`5:` Aus `4`
folgt: $(p\_\Box\_q \in A) \vee (q\_\Box\_p = \mathcal{U}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1`	"$(p\_\Box\_q \in A) \vee (q\_\Box\_p = \mathcal{U})$."

`3.b):` Aus `A1`
folgt: $(p\_\Box\_q \in A) \vee (q\_\Box\_p = \mathcal{U}).$

$\Box$

Die arithmetischen Grundfunktionen und die “Zahl oder $\mathcal{U}$ ” Alternative.

Ersterstellung: 30/04/10 **Letzte Änderung: 18/02/12**

126-1. In Anwendung der Sätze von **#124** und **#125** folgt unter anderem $x+y$ Zahl oder $= \mathcal{U}$. Damit treffen alle Aussagen, die von der Voraussetzung "$(x$ Zahl$) \vee (x = \mathcal{U})$" ausgehen - etwa **FSM**1 - auf $x+y$ zu, so dass etwa in Anwendung von **FSM**1 die Aussage "$1 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 1 = x+y$" gilt. Dass hier einige Aussagen von **100-3** "gedoppelt" werden, liegt an der stellenweise krummen Entstehungsgeschichte der Essays:

126-1(Satz)

a) "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$".

b) "$\mathsf{Re}x$ *Zahl*" *oder* "$\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$".

c) "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$".

d) "$\mathsf{Im}x$ *Zahl*" *oder* "$\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$".

e) "$-x$ *Zahl*" *oder* "$-x = \mathcal{U}$".

f) "$\mathsf{rez}(x)$ *Zahl*" *oder* "$\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$".

g) "$x+y$ *Zahl*" *oder* "$x+y = \mathcal{U}$".

h) "$x+y$ *Zahl*" *oder* "$y+x = \mathcal{U}$".

i) "$x \cdot y$ *Zahl*" *oder* "$x \cdot y = \mathcal{U}$"

j) "$x \cdot y$ *Zahl*" *oder* "$y \cdot x = \mathcal{U}$"

k) "$x : y$ *Zahl*" *oder* "$x : y = \mathcal{U}$".

l) "$x : y$ *Zahl*" *oder* "$y : x = \mathcal{U}$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **126-1**

`ALG`-**Notation**.

---

a)

Aus **AAII**"$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$"
folgt via **124-2**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$.

<u>Beweis **126-1**</u> `b)`

`1:` Aus **AAII**“$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus **⊆SZ**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **21-5**: $$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}.$$

`2:` Aus `1`“$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via **124-2**: $$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{A}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U}).$$

`3:` Via **95-4(Def)** gilt: $$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Zahl}).$$

`4:` Aus `2`“$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{A}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$” und
aus `3`“$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Zahl})$”
folgt: $$(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U}).$$

`c)`

Aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”
folgt via **124-2**: $$(\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U}).$$

`d)`

`1:` Aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus **⊆SZ**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **21-5**: $$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}.$$

`2:` Aus `1`“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via **124-2**: $$(\mathsf{Im}x \in \mathbb{A}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U}).$$

`3:` Via **95-4(Def)** gilt: $$(\mathsf{Im}x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Zahl}).$$

`4:` Aus `2`“$(\mathsf{Im}x \in \mathbb{A}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$” und
aus `3`“$(\mathsf{Im}x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Zahl})$”
folgt: $$(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U}).$$

`e)`

`1:` Aus **AAII**“$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via **124-2**: $$(\mathsf{mns}(x) \in \mathbb{A}) \vee (\mathsf{mns}(x) = \mathcal{U}).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(-x \in \mathbb{A}) \vee (-x = \mathcal{U}).$$

`3:` Via **95-4(Def)** gilt: $$(-x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-x \text{ Zahl}).$$

`4:` Aus `2`“$(-x \in \mathbb{A}) \vee (-x = \mathcal{U})$” und
aus `3`“$(-x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-x \text{ Zahl})$”
folgt: $$(-x \text{ Zahl}) \vee (-x = \mathcal{U}).$$

<u>Beweis</u> **126-1** `f)`

`1:` Aus **AAII**“$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via **124-2**: $(\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$.

`2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x)\text{ Zahl})$.

`3:` Aus `1`“$(\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$” und
aus `2`“$(\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x)\text{ Zahl})$”
folgt: $(\mathsf{rez}(x)\text{ Zahl}) \vee (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U})$.

`g)`

`1:` Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$”
folgt via **125-1**: $(x\_\mathsf{A}\_y \in \mathbb{A}) \vee (x\_\mathsf{A}\_y = \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x + y \in \mathbb{A}) \vee (x + y = \mathcal{U})$.

`3:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x + y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x + y\text{ Zahl})$.

`4:` Aus `2`“$(x + y \in \mathbb{A}) \vee (x + y = \mathcal{U})$” und
aus `3`“$(x + y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x + y\text{ Zahl})$”
folgt: $(x + y\text{ Zahl}) \vee (x + y = \mathcal{U})$.

`h)`

`1:` Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$”
folgt via **125-1**: $(x\_\mathsf{A}\_y \in \mathbb{A}) \vee (y\_\mathsf{A}\_x = \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x + y \in \mathbb{A}) \vee (y + x = \mathcal{U})$.

`3:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x + y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x + y\text{ Zahl})$.

`4:` Aus `2`“$(x + y \in \mathbb{A}) \vee (y + x = \mathcal{U})$” und
aus `3`“$(x + y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x + y\text{ Zahl})$”
folgt: $(x + y\text{ Zahl}) \vee (y + x = \mathcal{U})$.

Beweis **126-1** `i)`

`1:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”
folgt via **125-1**: $(x \_\mathsf{M}\_ y \in \mathbb{A}) \vee (x \_\mathsf{M}\_ y = \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \cdot y \in \mathbb{A}) \vee (x \cdot y = \mathcal{U})$.

`3:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \cdot y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `2`“$(x \cdot y \in \mathbb{A}) \vee (x \cdot y = \mathcal{U})$” und
aus `3`“$(x \cdot y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Zahl})$”
folgt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y = \mathcal{U})$.

`j)`

`1:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”
folgt via **125-1**: $(x \_\mathsf{M}\_ y \in \mathbb{A}) \vee (y \_\mathsf{M}\_ x = \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \cdot y \in \mathbb{A}) \vee (y \cdot x = \mathcal{U})$.

`3:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \cdot y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Zahl})$.

`4:` Aus `2`“$(x \cdot y \in \mathbb{A}) \vee (y \cdot x = \mathcal{U})$” und
aus `3`“$(x \cdot y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Zahl})$”
folgt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (y \cdot x = \mathcal{U})$.

<u>Beweis **126-1** `k)`</u>

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$
$\vee \quad (x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{A} \ldots$”
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`3:` Aus `2.1`“x Zahl” und
aus `2.2`“y Zahl”
folgt via **96-17**: $x : y$ Zahl.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$”
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$.

In beiden Fällen gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$.

Beweis **126-1** `1)`

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$
$\vee \quad (x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`3:` Aus `2.1`"x Zahl" und
aus `2.2`"y Zahl"
folgt via **96-17**: $x : y$ Zahl.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (y : x = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$"
folgt via **96-18**: $y : x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (y : x = \mathcal{U})$.

In beiden Fällen gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (y : x = \mathcal{U})$.

□

126-2. Wird **126-1**`k)` in Verbindung mit **96-24** betrachtet, so ergibt sich das folgende Resultat:

126-2(Satz)

$$x : y = \mathsf{Re}(x : y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x : y).$$

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **126-2**

`1`: Via **126-1** gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$.

`2`: Aus `1` "$(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y = \mathcal{U})$"
folgt via **96-24**: $x : y = \mathsf{Re}(x : y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x : y)$.

□

Einiges über $x + x$.
Einiges über $x \cdot x$.
Einiges über $x \cdot x + y \cdot y$.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 21/02/12**

127-1. Als Vorbereitung für Weiteres wird nun gezeigt, dass die Summe von x und x genau dann gleich 0 ist, wenn $x = 0$:

127-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x + x = 0$.

`ii)` $x = 0$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **127-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x + x = 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x + x = 0$"
folgt via **FS**$-$: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (x = -x)$.

`1.2:` $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}x) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Re}(x + x) \stackrel{\texttt{VS}}{=} \mathsf{Re}0 \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0$.

`1.3:` $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Im}(x + x) \stackrel{\texttt{VS}}{=} \mathsf{Im}0 \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus 2"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

...

Beweis **127-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x + x = 0.$

...

4.1: Aus 3“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **107-18**: $(\mathsf{Re}x \leq 0) \vee (0 \leq \mathsf{Re}x).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{4.1.1.Fall}}$ $\mathsf{Re}x \leq 0.$

Aus 4.1.1.Fall“$\mathsf{Re}x \leq 0$”,
aus 4.1.1.Fall“$\mathsf{Re}x \leq 0$” und
aus 1.2“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}x) = \ldots = 0$”
folgt via **109-22**: $\mathsf{Re}x = 0.$

$\boxed{\texttt{4.1.2.Fall}}$ $0 \leq \mathsf{Re}x.$

Aus 4.1.2.Fall“$0 \leq \mathsf{Re}x$”,
aus 4.1.2.Fall“$0 \leq \mathsf{Re}x$” und
aus 1.2“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}x) = \ldots = 0$”
folgt via **109-20**: $\mathsf{Re}x = 0.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{Re}x = 0\text{”}}$

...

Beweis **127-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x + x = 0.$

...

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(\mathsf{Im}x \leq 0) \vee (0 \leq \mathsf{Im}x).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{4.2.1.Fall}}$ $\mathsf{Im}x \leq 0.$

Aus `4.2.1.Fall`"$\mathsf{Im}x \leq 0$",
aus `4.2.1.Fall`"$\mathsf{Im}x \leq 0$" und
aus `1.3`"$(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) = \ldots = 0$"
folgt via **109-22**: $\mathsf{Im}x = 0.$

$\boxed{\texttt{4.2.2.Fall}}$ $0 \leq \mathsf{Im}x.$

Aus `4.2.2.Fall`"$0 \leq \mathsf{Im}x$",
aus `4.2.2.Fall`"$0 \leq \mathsf{Im}x$" und
aus `1.3`"$(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) = \ldots = 0$"
folgt via **109-20**: $\mathsf{Im}x = 0.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathsf{Im}x = 0\text{”}}$

`4.3:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{Re}x = 0$" und
aus `A2` gleich "$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **96-31**: $x = 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x = 0.$

`1:` Via **98-10** gilt: $0 + 0 = 0.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x = 0$" und
aus `1`"$0 + 0 = 0$"
folgt: $x + x = 0.$

$\square$

127-2. Via Negation folgt aus **127-1** das vorliegende Kriterium:

127-2(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq x + x$.

ii) $0 \neq x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **127-2**

1: Via **127-1** gilt: $(x + x = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x + x = 0)) \Leftrightarrow (\neg(x = 0))$.

3: Aus 2
folgt: $(0 \neq x + x) \Leftrightarrow (0 \neq x)$.

□

127-3. Falls $\mathsf{Re}x = 0$, dann $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$ und falls $\mathsf{Im}x = 0$, dann $x \cdot x = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)$:

127-3(Satz)

a) *Aus* “$\mathsf{Re}x = 0$” *folgt* “$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$”.

b) *Aus* “$\mathsf{Im}x = 0$” *folgt* “$x \cdot x = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)$”.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **127-3** a) `VS` gleich $\mathsf{Re}x = 0$.

1: Aus `VS` gleich “$\mathsf{Re}x = 0$” und
aus **95-12**“$0 \in \mathbb{T}$”
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

3.1: Aus 2“$\mathsf{Im}x$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

3.2: Aus 2“$\mathsf{Im}x$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}x) \cdot 0 = 0$.

...

Beweis **127-3** `a)` `VS` gleich $\mathsf{Re}x = 0.$

...

`4:` $x \cdot x$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}x))$$

$$\stackrel{\mathtt{VS}}{=} (0\cdot 0 - (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i}\cdot(0\cdot(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x)\cdot 0)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} (0 - (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i}\cdot(0\cdot(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x)\cdot 0)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i}\cdot(0\cdot(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x)\cdot 0)$$

$$\stackrel{3.1}{=} (-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i}\cdot(0 + (\mathsf{Im}x)\cdot 0)$$

$$\stackrel{3.2}{=} (-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i}\cdot(0 + 0)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} (-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i}\cdot 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-18}}{=} (-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} -(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x).$

`b)` `VS` gleich $\mathsf{Im}x = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x.$

`2:` Aus “$x \cdot x = x \cdot x$” und
aus `1`“$x = \mathsf{Re}x$”
folgt: $x \cdot x = (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x).$

□

127-4. Falls $x \cdot x \in \mathbb{T}$, dann x Zahl und $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Im}x = 0$. Umgekehrt folgt aus $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Im}x = 0$, dass $x \cdot x \in \mathbb{T}$:

127-4(Satz)

a) *Aus "$x \cdot x \in \mathbb{T}$" folgt "x Zahl" und "$(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$".*

b) *Aus "$\mathsf{Re}x = 0$" folgt "x Zahl" und "$x \cdot x \in \mathbb{T}$".*

c) *Aus "$\mathsf{Im}x = 0$" folgt "x Zahl" und "$x \cdot x \in \mathbb{T}$".*

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **127-4**</u> `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot x$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x \cdot x) = 0$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \cdot x$ Menge"
folgt via **96-15**: x Zahl.

`2.2:`
$$\begin{aligned}
&(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Im}(x \cdot x) \\
&\stackrel{1.2}{=} 0.
\end{aligned}$$

`3.1:` Aus `2.1`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.2:` Aus `2.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$"
folgt via **127-1**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

`4:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$.

`5:` Aus `2.1`"x Zahl" und
aus `4`"$(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0))$.

<u>Beweis</u> **127-4** `b) VS` gleich $\mathsf{Re}x = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0$" und
aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-9**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Im}x \text{ Zahl}).$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Im}x) = 0.$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}x) \cdot 0 = 0.$

`4:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x \cdot x)\\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ &(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x)\\
\stackrel{\mathtt{VS}}{=}\ &0 \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot 0\\
\stackrel{3.1}{=}\ &0 + (\mathsf{Im}x) \cdot 0\\
\stackrel{3.2}{=}\ &0 + 0\\
\stackrel{\mathbf{98-10}}{=}\ &0.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`"$\mathsf{Im}(x \cdot x) = \ldots = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \cdot x \in \mathbb{T}.$

`6:` Aus `2`"x Zahl $\ldots$" und
aus `5`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (x \cdot x \in \mathbb{T}).$

Beweis **127-4** `c)` `VS` gleich $\mathsf{Im}x = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0$" und
aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-9**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Re}x \text{ Zahl}).$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Re}x) = 0.$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Re}x) \cdot 0 = 0.$

`4:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x \cdot x)\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}x)\\
&\stackrel{\mathtt{VS}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot 0 + 0 \cdot (\mathsf{Re}x)\\
&\stackrel{3.2}{=} 0 + 0 \cdot (\mathsf{Re}x)\\
&\stackrel{3.1}{=} 0 + 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`"$\mathsf{Im}(x \cdot x) = \ldots = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \cdot x \in \mathbb{T}.$

`6:` Aus `2`"x Zahl $\ldots$" und
aus `5`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (x \cdot x \in \mathbb{T}).$

$\square$

127-5. Falls $x \cdot x \in \mathbb{S}$, dann $x \in \mathbb{B}$ und $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Im}x = 0$. Umgekehrt folgt aus $x \in \mathbb{B}$ und $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Im}x = 0$, dass $x \cdot x \in \mathbb{S}$:

127-5(Satz)

a) *Aus* "$x \cdot x \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$\mathsf{Re}x = 0$" *folgt* "$x \cdot x \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$\mathsf{Im}x = 0$" *folgt* "$x \cdot x \in \mathbb{S}$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **127-5** `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \cdot x = \mathsf{Re}(x \cdot x)$.

`2.2:` Aus `1`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **127-4**: $(x \text{ Zahl}) \wedge ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0))$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{S}$" und
aus `2.1`"$x \cdot x = \mathsf{Re}(x \cdot x)$"
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot x) \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `2.2`"x Zahl ..."
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`4.1:` Aus `3.2`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

...

Beweis **127-5** a) VS gleich $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

...

5.1: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt:

$$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}).$$

Fallunterscheidung

5.1.1.Fall $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

Aus 5.1.1.Fall "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus 5.1.1.Fall "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $x \in \mathbb{B}$.

...

<u>Beweis **127-5**</u> `a) VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.2.Fall` $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`6.1:` Aus `5.1.2.Fall`
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

`6.2:` Aus **95-7**"$0 \neq \mathsf{nan}$" und
aus `5.1.2.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$"
folgt: $0 \neq \mathsf{Im}x$.

`7:` Aus `2.2`"$\ldots (\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$" und
aus `6.2`"$0 \neq \mathsf{Im}x$"
folgt: $\mathsf{Re}x = 0$.

`8:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x \cdot x)\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\overset{7}{=} 0 \cdot 0 - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\overset{6.1}{=} 0 \cdot 0 - \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}\\
&\overset{\mathbf{98-16}}{=} 0 - \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}\\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} -\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}\\
&\overset{\mathbf{97-5}}{=} -\mathsf{nan}\\
&\overset{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}.
\end{aligned}$$

`9:` Aus 8"$\mathsf{Re}(x \cdot x) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-21**: $\mathsf{Re}(x \cdot x) \notin \mathbb{S}$.

`10:` Es gilt `9`"$\mathsf{Re}(x \cdot x) \notin \mathbb{S}$".
Es gilt `3.1`"$\mathsf{Re}(x \cdot x) \in \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{B}$.

...

<u>Beweis **127-5**</u> `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.3.Fall` $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

`6.1:` Aus `5.1.3.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$.

`6.2:` Aus **95-7**"$0 \neq \mathsf{nan}$" und
aus `5.1.3.Fall`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $0 \neq \mathsf{Re}x$.

`7:` Aus `2.2`"$\ldots (\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$" und
aus `6.2`"$0 \neq \mathsf{Re}x$"
folgt: $\mathsf{Im}x = 0$.

`8:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x \cdot x)\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\stackrel{7}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - 0 \cdot 0\\
&\stackrel{6.1}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} - 0 \cdot 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} - 0\\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} - 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} \mathsf{nan} + 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} \mathsf{nan}.
\end{aligned}$$

`9:` Aus `8`"$\mathsf{Re}(x \cdot x) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-21**: $\mathsf{Re}(x \cdot x) \notin \mathbb{S}$.

`10:` Es gilt `9`"$\mathsf{Re}(x \cdot x) \notin \mathbb{S}$".
Es gilt `3.1`"$\mathsf{Re}(x \cdot x) \in \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{B}$.

...

Beweis **127-5** a) VS gleich $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.1.4.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

6.1: Aus 5.1.4.Fall
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$.

6.2: Aus 5.1.4.Fall
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

7: $\mathsf{Re}(x \cdot x)$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$

$$\stackrel{6.1}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$

$$\stackrel{6.2}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} - \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}$$

$$\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} - \mathsf{nan}$$

$$\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}.$$

8: Aus 7 "$\mathsf{Re}(x \cdot x) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-21**: $\mathsf{Re}(x \cdot x) \notin \mathbb{S}$.

9: Es gilt 9 "$\mathsf{Re}(x \cdot x) \notin \mathbb{S}$".
Es gilt 3.1 "$\mathsf{Re}(x \cdot x) \in \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{B}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} x \in \mathbb{B} \text{"}}$

5.2: Aus A1 gleich "$x \in \mathbb{B}$" und
aus 2.2 "$\ldots (\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$"
folgt: $(x \in \mathbb{B}) \wedge ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0))$.

<u>Beweis **127-5**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$" und
aus `1`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **127-3**: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus `3`"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$"
folgt: $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

`c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **127-3**: $x \cdot x = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot x = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)$" und
aus `2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$"
folgt: $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

$\square$

127-6. Falls $x \cdot x \in \mathbb{R}$, dann $x \in \mathbb{C}$ und $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Im}x = 0$. Umgekehrt folgt aus $x \in \mathbb{C}$ und $\mathsf{Re}x = 0$ oder $\mathsf{Im}x = 0$, dass $x \cdot x \in \mathbb{R}$:

127-6(Satz)

a) *Aus* "$x \cdot x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$\mathsf{Re}x = 0$" *folgt* "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$\mathsf{Im}x = 0$" *folgt* "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **127-6** `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \cdot x = \mathsf{Re}(x \cdot x)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$x \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-5**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0))$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$" und
aus `2.1`"$x \cdot x = \mathsf{Re}(x \cdot x)$"
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot x) \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.2`"$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

`4.1:` Aus `3.2`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}x = +\infty) \vee (\mathsf{Im}x = -\infty)$.

...

Beweis **127-6** `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

`5.1:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt:

$$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x = +\infty)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x = -\infty)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = +\infty)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = -\infty)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = +\infty)$$
$$\vee \quad (\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = -\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

Aus `5.1.Fall`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `5.1.1.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $x \in \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **127-6**</u> `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.2.Fall` $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x = +\infty)$.

`6.1:` Aus `5.1.2.Fall`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}\ldots$" und
aus `5.1.2.Fall`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$.

`6.2:` Aus `5.1.2.Fall`
folgt: $\mathsf{Im}x = +\infty$.

`7:` Aus `6.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (+\infty) = -\infty$.

`8:`

$$x \cdot x \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(x \cdot x) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (+\infty) \stackrel{7}{=} -\infty.$$

`9:` Aus `8`"$x \cdot x = \ldots = -\infty$"
folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`10:` Es gilt `9`"$x \cdot x \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

...

Beweis **127-6** a) `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.3.Fall` $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x = -\infty)$.

`6.1:` Aus `5.1.3.Fall`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `5.1.3.Fall`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$.

`6.2:` Aus `5.1.3.Fall`
folgt: $\mathsf{Im}x = -\infty$.

`7:` Aus `6.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (+\infty) = -\infty$.

`8:`

$$x \cdot x \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(x \cdot x) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (+\infty) \stackrel{7}{=} -\infty.$$

`9:` Aus `8`"$x \cdot x = \ldots = -\infty$"
folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`10:` Es gilt `9`"$x \cdot x \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

...

Beweis **127-6** `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.4.Fall` $(\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`6.1:` Aus `5.1.4.Fall`"... $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `5.1.4.Fall`"... $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via ·**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`6.2:` Aus `5.1.4.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}x = +\infty$.

`7:` Aus `6.1`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(+\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = +\infty$.

`8:`
$$x \cdot x \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(x \cdot x) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.2}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{7}{=} +\infty.$$

`9:` Aus `8`"$x \cdot x = \ldots = +\infty$"
folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`10:` Es gilt `9`"$x \cdot x \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **127-6**</u> `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.5.Fall` $(\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = +\infty)$.

`6.1:` Aus `5.1.5.Fall` folgt: $\mathsf{Re}x = +\infty$.

`6.2:` Aus `5.1.5.Fall` folgt: $\mathsf{Im}x = +\infty$.

`7:`
$$x \cdot x \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(x \cdot x) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.1}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.2}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) - (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - (+\infty) \stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}.$$

`8:` Aus 7 "$x \cdot x = \ldots = \mathsf{nan}$" folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`9:` Es gilt 8 "$x \cdot x \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **127-6**</u> `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.1.6.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = -\infty)$.

`6.1:` Aus `5.1.6.Fall` folgt: $\mathsf{Re}x = +\infty$.

`6.2:` Aus `5.1.6.Fall` folgt: $\mathsf{Im}x = -\infty$.

`7:`

$$x \cdot x \overset{2.1}{=} \mathsf{Re}(x \cdot x) \overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \overset{6.1}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \overset{6.2}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) - (-\infty) \cdot (-\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - (-\infty) \cdot (-\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - (+\infty) \overset{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}.$$

`8:` Aus `7`“$x \cdot x = \ldots = \mathsf{nan}$” folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`9:` Es gilt `8`“$x \cdot x \notin \mathbb{R}$”.
Es gilt `VS` gleich “$x \cdot x \in \mathbb{R}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **127-6**</u> `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.7.Fall` $(\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`6.1:` Aus `5.1.7.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `5.1.7.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`6.2:` Aus `5.1.7.Fall`
folgt: $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`7:` Aus `6.1`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(+\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = +\infty$.

`8:`
$$x \cdot x \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(x \cdot x) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.2}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{7}{=} +\infty.$$

`9:` Aus `8`"$x \cdot x = \ldots = +\infty$"
folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`10:` Es gilt `9`"$x \cdot x \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

...

Beweis **127-6** `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.1.8.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = +\infty)$.

`6.1:` Aus `5.1.8.Fall` folgt: $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`6.2:` Aus `5.1.8.Fall` folgt: $\mathsf{Im}x = +\infty$.

`7:`

$$x \cdot x \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(x \cdot x) \stackrel{\mathbf{96-28}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.1}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.2}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) - (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - (+\infty) \stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \mathsf{nan}.$$

`8:` Aus `7` "$x \cdot x = \ldots = \mathsf{nan}$" folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`9:` Es gilt `8` "$x \cdot x \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **127-6**</u> `a)` `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.1.9.Fall` $(\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Im}x = -\infty)$.

`6.1:` Aus `5.1.9.Fall` folgt: $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`6.2:` Aus `5.1.9.Fall` folgt: $\mathsf{Im}x = -\infty$.

`7:`

$$\begin{aligned} & x \cdot x \\ \stackrel{2.1}{=} \; & \mathsf{Re}(x \cdot x) \\ \stackrel{\mathbf{96-28}}{=} \; & (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \\ \stackrel{6.1}{=} \; & (-\infty) \cdot (-\infty) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \\ \stackrel{6.2}{=} \; & (-\infty) \cdot (-\infty) - (-\infty) \cdot (-\infty) \\ \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \; & (+\infty) - (+\infty) \\ \stackrel{\mathbf{97-4}}{=} \; & \mathsf{nan}. \end{aligned}$$

`8:` Aus `7`“$x \cdot x = \ldots = \mathsf{nan}$” folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`9:` Es gilt `8`“$x \cdot x \notin \mathbb{R}$”.
Es gilt `VS` gleich “$x \cdot x \in \mathbb{R}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: `A1` | “$x \in \mathbb{C}$”

`5.2:` Aus `A1` gleich “$x \in \mathbb{C}$” und
aus `2.2`“$\ldots (\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$”
folgt: $(x \in \mathbb{C}) \wedge ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0))$.

<u>Beweis</u> **127-6** `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **127-3**: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus `3`"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

`c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `3`"$x \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

$\square$

127-7. Falls $x \in \mathbb{T}$ und $x \cdot x \in \mathbb{S}$, dann ist $x \in \mathbb{S}$. Ähnlich folgt aus $x \in \mathbb{T}$ und $x \cdot x \in \mathbb{R}$, dass x eine reelle Zahl ist:

127-7(Satz)

a) *Aus* "$x \cdot x \in \mathbb{S}$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \in \mathbb{S}$".

b) *Aus* "$x \cdot x \in \mathbb{R}$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \in \mathbb{R}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **127-7** a) VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot x \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-5**: $x \in \mathbb{B}$.

2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus 1 "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

b) VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot x \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via **127-6**: $x \in \mathbb{C}$.

2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus 1 "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

127-8. Interessanter Weise gilt $0 \leq x \cdot x$ *genau dann, wenn* $x \in \mathbb{S}$:

127-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \leq x \cdot x$.

`ii)` $x \in \mathbb{S}$.

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **127-8**

`REIM`-**Notation**.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \leq x \cdot x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \cdot x$"
folgt via **107-3**: $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-5**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **127-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \leq x \cdot x.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $\mathsf{Re}x = 0.$

`4:` Aus `3.1.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0$”
folgt via **127-3**: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x).$

`5.1:` Aus 2“$x \in \mathbb{B} \ldots$”
folgt via **101-3**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}.$

`5.2:` Aus `VS` gleich “$0 \leq x \cdot x$” und
aus 4“$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$”
folgt: $0 \leq -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x).$

`6:` Aus `5.1`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”
folgt via **112-4**: $0 \leq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x).$

`7:` Aus 6“$0 \leq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$” und
aus `5.2`“$0 \leq -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$”
folgt via **109-18**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0.$

`8:` Aus `5.1`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$”,
aus `5.1`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$” und
aus 7“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$”
folgt via **NTF**$\mathbb{S}$: $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0).$

`9:` Aus 8
folgt: $\mathsf{Im}x = 0.$

`10:` Aus `3.1.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0$” und
aus 9“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **96-31**: $x = 0.$

`11:` Aus 10“$x = 0$” und
aus **95-11**“$0 \in \mathbb{S}$”
folgt: $x \in \mathbb{S}.$

...

<u>Beweis **127-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \leq x \cdot x$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $\mathsf{Im}x = 0$.

`4:` Aus `3.2.Fall`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$x \in \mathbb{T}$” und
aus `2`“$x \in \mathbb{B} \ldots$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **112-4**: $0 \leq x \cdot x$.

$\square$

127-9. Nur weil die Zahlen mit RealTeil= 0 keinen eigenen Namen haben - die Zahlen mit ImaginärTeil= 0 sind die treellen Zahlen - ist die Formulierung von **127-9** etwas aufwändiger als das Kriterium **127-8**:

127-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot x \leq 0$.

`ii)` "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$\mathsf{Re}x = 0$".

`iii)` "$\mathsf{Re}x = 0$" *und* "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$".

`REIM.RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **127-9** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $x \cdot x \leq 0$.

1: Aus `VS` gleich "$x \cdot x \leq 0$"
folgt via **107-3**: $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1"$x \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-5**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge ((\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0))$.

3: Aus 2
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\mathsf{Re}x = 0$.

Aus 2"$x \in \mathbb{B} \ldots$" und
aus `3.1.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$.

...

Beweis **127-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x \leq 0.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $\mathsf{Im}x = 0.$

`4:` Aus `3.2.Fall`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}.$

`5:` Aus `4`“$x \in \mathbb{T}$” und
aus `2`“$x \in \mathbb{B} \ldots$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{S}.$

`6:` Aus `6`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **127-8**: $0 \leq x \cdot x.$

`7:` Aus `VS` gleich “$x \cdot x \leq 0$” und
aus `6`“$0 \leq x \cdot x$”
folgt via **107-13**: $x \cdot x = 0.$

`8:` Aus `5`“$x \in \mathbb{S}$”,
aus `5`“$x \in \mathbb{S}$” und
aus `7`“$x \cdot x = 0$”
folgt via **NTF**$\mathbb{S}$: $(x = 0) \vee (x = 0).$

`9:` Aus `8`
folgt: $x = 0.$

`10:` Aus `9`“$x = 0$”
folgt via **96-31**: $\mathsf{Re}x = 0.$

`11:` Aus `2`“$x \in \mathbb{B} \ldots$” und
aus `10`“$\mathsf{Re}x = 0$”
folgt: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0).$

Beweis **127-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

2: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{Re}x = 0$" und
aus 1"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

1.1: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **127-3**: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \leq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

2: Aus 1.2"$0 \leq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$"
folgt via **109-16**: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \leq 0$.

3: Aus 1.1"$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus 2"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \leq 0$"
folgt: $x \cdot x \leq 0$.

□

127-10. Es gilt $0 \neq x \in \mathbb{S}$ genau dann, wenn $0 < x \cdot x$:

<u>**127-10(Satz)**</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 < x \cdot x$.

`ii)` $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

<u>`RECH.`**≤-Notation**</u>

<u>Beweis **127-10**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 < x \cdot x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \cdot x$"
folgt via **41-3**: $(0 \leq x \cdot x) \wedge (0 \neq x \cdot x)$.

`2:` Aus `1`"$0 \leq x \cdot x \ldots$"
folgt via **127-8**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$",
aus `2`"$x \in \mathbb{S}$" und
aus `1`"$\ldots 0 \neq x \cdot x$"
folgt via **111-1**: $0 \neq x$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq x$" und
aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **111-1**: $0 \neq x \cdot x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \leq x \cdot x$.

`2:` Aus `1.2`"$0 \leq x \cdot x$" und
aus `1.1`"$0 \neq x \cdot x$"
folgt via **41-3**: $0 < x \cdot x$.

□

127-11. Es gilt $x \cdot x < 0$ unter anderem genau dann, wenn $\mathsf{Re}x = 0$ und $0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$:

127-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot x < 0$.

`ii)` "$0 \neq x \in \mathbb{B}$" *und* "$\mathsf{Re}x = 0$".

`iii)` "$\mathsf{Re}x = 0$" *und* "$0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$".

`REIM.RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **127-11** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x < 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x < 0$"
folgt via **41-3**: $(x \cdot x \leq 0) \wedge (x \cdot x \neq 0)$.

`2.1:` Aus `1`"$x \cdot x \leq 0 \ldots$"
folgt via **127-9**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x \cdot x \neq 0$"
folgt: $0 \neq x \cdot x$.

`3:` Aus `2.2`"$0 \neq x \cdot x$"
folgt via **98-20**: $(0 \neq x) \vee (0 \neq x)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $0 \neq x$.

`5:` Aus `4`"$0 \neq x$" und
aus `2.1`"$(x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$.

Beweis **127-11** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(0 \neq x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}x = 0)$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

1.2: Aus VS gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **96-32**: $(0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x)$.

2: Aus 1.2"$(0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x)$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{Re}x = 0$"
folgt: $0 \neq \mathsf{Im}x$.

3: Aus 2"$0 \neq \mathsf{Im}x$" und
aus 1.1"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

4: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{Re}x = 0$" und
aus 3"$0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

<u>Beweis **127-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$"
folgt via **127-3**: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-9**: $x \cdot x \leq 0$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x \ldots$"
folgt via **111-1**: $0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.1:` Aus `1.2`"$x \cdot x \leq 0$" und
aus `1.1`"$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$"
folgt: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \leq 0$.

`2.2:` Aus `1.3`"$0 \neq (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$"
folgt via **100-13**: $0 \neq -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \neq 0$.

`4:` Aus `2.1`"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \leq 0$" und
aus `3`"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \neq 0$"
folgt via **41-3**: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) < 0$.

`5:` Aus `1.1`"$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus `4`"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) < 0$"
folgt: $x \cdot x < 0$.

$\square$

127-12. Nun wird eine Diskussion von $x, y \in \mathbb{S}$ und $0 \le x \cdot x + y \cdot y$ eröffnet:

127-12(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$0 \le x \cdot x + y \cdot y$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *und* "$(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$" *folgt* "$0 < x \cdot x + y \cdot y$".

`RECH.`$\le$-**Notation**.

Beweis **127-12** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **127-8**: $0 \leq x \cdot x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \leq y \cdot y$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \leq x \cdot x$" und
aus `1.2`"$0 \leq y \cdot y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 \leq x \cdot x + y \cdot y$.

`b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge ((0 \neq x) \vee (0 \neq y))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus 2"$0 \neq x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 < x \cdot x$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **127-8**: $0 \leq y \cdot y$.

`4:` Aus `3.1`"$0 < x \cdot x$" und
aus `3.2`"$0 \leq y \cdot y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < x \cdot x + y \cdot y$.

`1.2.Fall` $0 \neq y$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **127-8**: $0 \leq x \cdot x$.

`3.2:` Aus 2"$0 \neq y \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 < y \cdot y$.

`4:` Aus `3.1`"$0 \leq x \cdot x$" und
aus `3.2`"$0 < y \cdot y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < x \cdot x + y \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 < x \cdot x + y \cdot y$.

$\square$

127-13. Aus $x, y \in \mathbb{T}$ und $0 \leq x \cdot x + y \cdot y$ folgt $x, y \in \mathbb{S}$. Ähnlich folgt aus $x, y \in \mathbb{T}$ und $0 < x \cdot x + y \cdot y$ die Aussage $x, y \in \mathbb{S}$, wobei x, y nicht gleichzeitig$= 0$ sein können:

127-13(Satz)

a) *Aus* "$0 \leq x \cdot x + y \cdot y$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$"
folgt "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$".

b) *Aus* "$0 < x \cdot x + y \cdot y$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$"
folgt "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *und* "$(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **127-13**</u> `a)` `VS` gleich $(0 \le x \cdot x + y \cdot y) \wedge (x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \cdot x + y \cdot y \ldots$"
folgt via **107-3**: $x \cdot x + y \cdot y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \cdot x + y \cdot y \in \mathbb{S}$" und
aus `1.1`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-4**: $(x \cdot x \in \mathbb{S}) \wedge (y \cdot y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2`"$x \cdot x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **127-5**: $x \in \mathbb{B}$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots y \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-5**: $y \in \mathbb{B}$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3.1`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$y \in \mathbb{B}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

<u>Beweis **127-13**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x \cdot x + y \cdot y) \wedge (x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \cdot x + y \cdot y \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x \cdot x + y \cdot y$.

`2:` Aus `1`"$0 \leq x \cdot x + y \cdot y$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **127-10**: $0 \leq x \cdot x$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 \leq y \cdot y$.

`4.1:` Aus `3.1`"$0 \leq x \cdot x$",
aus `3.2`"$0 \leq y \cdot y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < x \cdot x + y \cdot y$"
folgt via **109-20**: $(0 < x \cdot x) \vee (0 < y \cdot y)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $0 < x \cdot x$.

`5:` Aus `4.1.1.Fall`"$0 < x \cdot x$"
folgt via **127-8**: $0 \neq x$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

`4.1.2.Fall` $0 < y \cdot y$.

`5:` Aus `4.1.2.Fall`"$0 < y \cdot y$"
folgt via **127-8**: $0 \neq y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$"

`4.2:` Aus `2`"$(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$" und
aus `A1` gleich "$(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$"
folgt: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge ((0 \neq x) \vee (0 \neq y))$.

$\square$

127-14. Aus $x, y \in \mathbb{T}$ mit $x \cdot x + y \cdot y = 0$ folgt $x = y = 0$. Dass hier die Voraussetzung "$x, y \in \mathbb{T}$" wichtig ist, wird in **127-15** thematisiert und in **127-16** via Beispiel erläutert.

127-14(Satz)

Aus "$x \cdot x + y \cdot y = 0$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$"
folgt "$x = 0$" *und* "$y = 0$".

RECH-**Notation**.

Beweis **127-14**

$\le$-Notation.

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **·SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **·SZ**: $y \cdot y \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus →) "$x \cdot x + y \cdot y = 0$"
folgt via **FS**−: $(x \cdot x \in \mathbb{C}) \wedge (y \cdot y \in \mathbb{C})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.3`"$x \cdot x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via ∧**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \cdot y \in \mathbb{T}$" und
aus `1.3`"$\ldots y \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via ∧**SZ**: $y \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `3.1`"$x \cdot x \in \mathbb{R}$" und
aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **127-7**: $x \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `3.2`"$y \cdot y \in \mathbb{R}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **127-7**: $y \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via ∈**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via ∈**SZ**: $y \in \mathbb{S}$.

`5.1:` Es gilt:
$$0 \neq x \vee 0 \neq y \vee (x = 0) \wedge (y = 0).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **127-14**

...

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $0 \neq x$.

`6:` Aus `4.1`"$x \in \mathbb{S}$",
aus `4.2`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `5.1.1.Fall`"$0 \neq x$"
folgt via **127-12**: $0 < x \cdot x + y \cdot y$.

`7:` Aus `6`"$0 < x \cdot x + y \cdot y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x \cdot x + y \cdot y$.

`8:` Es gilt `7`"$0 \neq x \cdot x + y \cdot y$".
Es gilt →) "$x \cdot x + y \cdot y = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

`5.1.2.Fall` $0 \neq y$.

`6:` Aus `4.1`"$x \in \mathbb{S}$",
aus `4.2`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `5.1.2.Fall`"$0 \neq y$"
folgt via **127-12**: $0 < x \cdot x + y \cdot y$.

`7:` Aus `6`"$0 < x \cdot x + y \cdot y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x \cdot x + y \cdot y$.

`8:` Es gilt `7`"$0 \neq x \cdot x + y \cdot y$".
Es gilt →) "$x \cdot x + y \cdot y = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

`6.1.3.Fall` $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: `A1` | "$(x = 0) \wedge (y = 0)$"

`6.a):` Aus `A1`
folgt: $x = 0$.

`6.b):` Aus `A1`
folgt: $y = 0$.

□

127-15. Auf die Voraussetzungen “$x \in \mathbb{T}$” und “$y \in \mathbb{T}$” kann, wie vorab zu **127-14** angedeutet, in **127-14** nicht verzichtet werden:

127-15.Bemerkung

Die Aussage
“$(0 = x \cdot x + y \cdot y) \Rightarrow ((x = 0) \wedge (y = 0))$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

127-16. An Hand des nunmehrigen Beispiels wird klar, dass auf die Voraussetzungen “$x \in \mathbb{T}$” und “$y \in \mathbb{T}$” in **127-14** nicht ohne Weiteres verzichtet werden kann:

127-16.BEISPIEL

Es gelte:

→) $x = 1$.

→) $y = \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{T}$.

b) $y \notin \mathbb{T}$.

c) $x \cdot x + y \cdot y = 0$.

d) $0 \neq x$.

e) $0 \neq y$.

127-17. Wegen $0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$ folgt aus $0 < x \cdot x + y \cdot y$ die Aussage $0 \neq x$ oder $0 \neq y$:

127-17(Satz)

Aus "$0 \neq x \cdot x + y \cdot y$" *folgt* "$(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **127-17** `VS` gleich $0 \neq x \cdot x + y \cdot y$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y) \vee (x = 0) \wedge (y = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

`1.2.Fall` $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` folgt: $x = 0$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` folgt: $y = 0$.

`3:` $x \cdot x + y \cdot y \stackrel{2.1}{=} 0 \cdot 0 + y \cdot y \stackrel{2.2}{=} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-16}}{=} 0 + 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0$.

`4:` Es gilt `VS` gleich "$0 \neq x \cdot x + y \cdot y$".
Es gilt `3`"$x \cdot x + y \cdot y = \ldots = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

□

Einiges über $\mathsf{ab2}(x)$ und die Lokalisierung von x.
$\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 22/02/12**

128-1. Da $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ gilt, ist die folgende Aussage wenig überraschend:

128-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Zahl.*

`ii)` $\mathsf{ab2}(x)$ *Zahl.*

Beweis **128-1** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich x Zahl.

Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus **96-22**"$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `1`"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{A}$"
folgt via **94-12**: $x \in \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

□

128-2. Dem Funktionswert 0 kommt bei $\mathsf{ab2}$ eine ausgezeichnete Rolle zu:

128-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = 0$.

`ii)` $\mathsf{ab2}(x) = 0$.

Beweis **128-2**

REIM.RECH-**Notation**.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x = 0$" folgt via **96-31**: $\mathsf{Re}x = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x = 0$" folgt via **96-31**: $\mathsf{Im}x = 0$.

`2:`

$$\begin{aligned}\mathsf{ab2}(x) &\overset{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)\\ &\overset{1.1}{=} 0\cdot 0 + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)\\ &\overset{1.2}{=} 0\cdot 0 + 0\cdot 0\\ &\overset{\mathbf{98-16}}{=} 0+0\\ &\overset{\mathbf{98-10}}{=} 0.\end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{ab2}(x) = 0$.

<u>Beweis **128-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\mathtt{VS}$ gleich $\mathsf{ab2}(x) = 0.$.

1: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$

$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(x)$

$\stackrel{\mathtt{VS}}{=} 0.$

2: Aus 1 "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \ldots = 0$"
folgt via **FS**−: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{C}) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C})$.

3.1: Aus 2 "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)$ Menge.

3.2: Aus 2 "$\ldots (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$ Menge.

4.1: Aus 3.1 "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)$ Menge"
folgt via **96-15**: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

4.2: Aus 3.2 "$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$ Menge"
folgt via **96-15**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

5.1: Aus 4.1 "$\mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

5.2: Aus 4.2 "$\mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

6: Aus 1 "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \ldots = 0$",
aus 5.1 "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus 5.2 "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **127-14**: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

7: Aus 6 "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$" und
aus 6 "$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **96-31**: $x = 0$.

□

128-3. Via Negation ergibt sich aus **128-2** das vorliegenden Kriterium:

128-3(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq x$.

ii) $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$.

Beweis **128-3**

1: Via **128-2** gilt: $(x = 0) \Leftrightarrow (\mathsf{ab2}(x) = 0)$.

2: Aus 1
folgt: $(0 \neq x) \Leftrightarrow (0 \neq \mathsf{ab2}(x))$.

□

128-4. Nun folgt ein Kriterium für $0 \neq x$ Zahl, in dem die Aussage “$0 \neq \mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$” natürlich eine Abkürzung für “$(0 \neq \mathsf{ab2}(x)) \wedge (\mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U})$” ist:

128-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x$ *Zahl.*

`ii)` $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$ *Zahl.*

`iii)` $0 \neq \mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$.

<u>Beweis **128-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $0 \neq x$ Zahl.

1.1: Aus VS gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **128-3**: $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots x$ Zahl"
folgt via **128-1**: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

1: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **95-6**: $\mathsf{ab2}(x)$ Menge.

2: Aus 1"$\mathsf{ab2}(x)$ Menge"
folgt via **0-17**: $\mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$.

3: Aus VS gleich "$0 \neq \mathsf{ab2}(x) \ldots$" und
aus 2"$\mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$"
folgt: $0 \neq \mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $0 \neq \mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$.

1.1: Aus VS gleich "$0 \neq \mathsf{ab2}(x) \ldots$"
folgt via **128-3**: $0 \neq x$.

1.2: Aus **96-22**"$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $x \in \mathbb{A}$.

2: Aus 1.2"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

3: Aus 1.1"$0 \neq x$" und
aus 2"x Zahl"
folgt: $0 \neq x$ Zahl.

$\square$

128-5. Die kanonisch erscheinende Aussage $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$ gilt genau dann, wenn $x \in \mathbb{B}$:

128-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{B}$.

`ii)` $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

≤-Notation.

Beweis **128-5**

`REIM.RECH`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$..

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-12**: $0 \leq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` Via **96-22** gilt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus `3`"$\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$"
folgt: $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

Beweis **128-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \le \mathsf{ab2}(x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **107-3**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Via **96-22** gilt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 \le \mathsf{ab2}(x)$" und
aus `1.2`"$\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$"
folgt: $0 \le (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` Aus `2.1`"$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **128-1**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`5:` Aus `2.2`"$0 \le (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$",
aus `4`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `4`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **127-13**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{S})$.

`6:` Aus `5`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `5`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $x \in \mathbb{B}$.

$\square$

128-6. Mit Hilfe bereits verfügbarer Resultate ist es nicht schwer, die Äquivalenz von "$0 \neq x \in \mathbb{B}$" und "$0 < \mathsf{ab2}(x)$" nachzuweisen:

128-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \in \mathbb{B}$.

`ii)` $0 < \mathsf{ab2}(x)$.

≤-Notation.

Beweis **128-6** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{B}$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **128-3**: $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{B}$"
folgt via **128-5**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

`2`: Aus `1.2`"$0 \leq \mathsf{ab2}(x)$" und
aus `1.1`"$0 \neq \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **41-3**: $0 < \mathsf{ab2}(x)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 < \mathsf{ab2}(x)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$0 < \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **41-3**: $(0 \leq \mathsf{ab2}(x)) \wedge (0 \neq \mathsf{ab2}(x))$.

`2.1`: Aus `1`"$0 \leq \mathsf{ab2}(x) \ldots$"
folgt via **128-5**: $x \in \mathbb{B}$.

`2.2`: Aus `1`"$\ldots 0 \neq \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **128-3**: $0 \neq x$.

`3`: Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{B}$.

□

128-7. Ob x ein Element von $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ ist kann unter anderem an $\mathsf{ab2}(x)$ erkannt werden:

128-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`ii)` "$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$" *oder* "$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$".

`iii)` $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

`REIM`-**Notation**.

Beweis **128-7**

RECH-Notation.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (x \notin \mathbb{B})$.

2.1: Aus 1"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

2.2: Aus 1"$\ldots x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **101-4**: $(\mathsf{Re}x \notin \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{S})$.

3: Aus 2.1"x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

4.1: Aus 3"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

4.2: Aus 3"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $((\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})) \wedge ((\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}))$.

6: Aus 4"$((\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})) \wedge ((\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}))$" und
aus 2.2"$(\mathsf{Re}x \notin \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{S})$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

<u>Beweis **128-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

1: Nach `VS` gilt: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$.

2: Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-16**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

4: Aus 3“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus 3“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$.

5: Aus 4“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \mathsf{nan}$.

6:
$$\begin{aligned}
&\mathsf{ab2}(x)\\
&\overset{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\overset{\texttt{1.1.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\overset{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\overset{5}{=} \mathsf{nan}.
\end{aligned}$$

7: Aus 6
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

...

<u>Beweis **128-7**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

2: Aus `1.2.Fall`"$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

4: Aus 3"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus 3"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$.

5: Aus 4"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

6:
$$\begin{aligned} &\mathsf{ab2}(x) \\ &\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \\ &\stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \\ &\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + \mathsf{nan} \\ &\stackrel{5}{=} \mathsf{nan}. \end{aligned}$$

7: Aus 6
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

Beweis **128-7** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$" und
aus **95-5**"nan Zahl"
folgt: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

2: Aus 1"$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **128-1**: x Zahl.

3: Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

Fallunterscheidung

3.1.Fall $x \in \mathbb{B}$.

4: Aus 3.1.Fall"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **128-5**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

5: Aus 4"$0 \leq \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **107-3**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{S}$.

6: Aus 5"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-20**: $\mathsf{ab2}(x) \neq \mathsf{nan}$.

7: Es gilt 6"$\mathsf{ab2}(x) \neq \mathsf{nan}$".
Es gilt VS gleich "$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathbb{B}$.

3.2.Fall $x \notin \mathbb{B}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: A1 | "$x \notin \mathbb{B}$"

4: Aus 2"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

5: Aus 4"$x \in \mathbb{A}$" und
aus A1 gleich "$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

□

128-8. Es gilt $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$:

<u>128-8(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`ii)` $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

Beweis **128-8**

`REIM.RECH.`$\leq$-**Notation**.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`2.1:` Aus `1`"$x \in \mathbb{B}\ldots$"
folgt via **128-5**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

`2.2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{B}\ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3.1:` Aus **107-6**"$-\infty < 0$" und
aus `2.1`"$0 \leq \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **107-8**: $-\infty < \mathsf{ab2}(x)$.

`3.2:` Aus `2.2`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`4.1:` Aus `3.2`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}\ldots$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$.

`4.3:` Via **96-22** gilt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4.4:` Aus `3.1`"$-\infty < \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **107-10**: $(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **128-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.4.1.Fall` $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.3`“$\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$” und
aus `4.4.1.Fall`“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **109-5**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{C}) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C})$.

`7.1:` Aus `4.1`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$” und
aus `6`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$.

`7.2:` Aus `4.2`“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$” und
aus `6`“$\ldots (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{C}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`8.1:` Aus `7.1`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **127-6**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$.

`8.1:` Aus `7.2`“$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **127-6**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{C}$.

`9.1:` Aus `8.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-14**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`9.2:` Aus `8.2`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-14**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`10:` Aus `9.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$” und
aus `9.2`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`11:` Es gilt `10`“$x \in \mathbb{C}$”.
Es gilt `1`“$\ldots x \notin \mathbb{C}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`4.4.2.Fall` $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

Beweis **128-8** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`1.1:` Via **96-22** gilt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`1.2:` Aus **107-6**"$0 < +\infty$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$"
folgt: $0 < \mathsf{ab2}(x)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$" und
aus `1.1`"$\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = +\infty$.

`2.2:` Aus `1.2`"$0 < \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **128-6**: $x \in \mathbb{B}$.

`3:` Es gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (x \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`5.1:` Aus `4`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `4`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `4`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$" und
aus `5.2`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `6`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \neq +\infty$.

`8:` Es gilt `7`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \neq +\infty$".
Es gilt `2.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathbb{C}$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \notin \mathbb{C}$"

...

<u>Beweis **128-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

...

`4:` Aus `2.2`"$x \in \mathbb{B}$" und
aus `A1` gleich "$x \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

□

128-9. Es gilt $x \in \mathbb{C}$ unter anderem genau dann, wenn $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$:

128-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \mathbb{C}$.

`ii)` $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`iii)` $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`iv)` $0 \leq \mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

≤-Notation.

Beweis **128-9**

`REIM.RECH`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`1.2`: Via **96-22** gilt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.1`: Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$.

`2.2`: Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`3`: Aus `2.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{R}$" und
aus `2.2`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$.

`4`: Aus `1.2`"$\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus `3`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **128-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **128-1**: x Zahl.

`3:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **128-5**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

`5:` Aus `4`"$0 \leq \mathsf{ab2}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`4:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `3.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`6:` Aus `5`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **128-7**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `6`"$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-18**: $\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{R}$.

`8:` Es gilt `7`"$\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-4**: $\mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq \mathsf{ab2}(x) \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{ab2}(x) < +\infty$"
folgt: $0 \leq \mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

Beweis **128-9** $\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \leq \mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq \mathsf{ab2}(x) \ldots$"
folgt via **128-5**: $x \in \mathbb{B}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ab2}(x) < +\infty$"
folgt via **41-3**: $\mathsf{ab2}(x) \neq +\infty$.

`2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (x \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{C}$.

`3:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{B}$" und
aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`4:` Aus `4`"$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **128-8**: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`5:` Es gilt `4`"$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$".
Es gilt `1.2`"$\mathsf{ab2}(x) \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{C}$.

$\square$

128-10. Aus **128-9** folgt hauptsächlich unter Heranziehung von **128-3** folgendes Kriterium für $0 \neq x \in \mathbb{C}$:

128-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`ii)` $0 \neq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`iii)` $0 < \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`iv)` $0 < \mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

≤-Notation.

Beweis **128-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **128-3**: $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt vai **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`2`: Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $0 \neq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **128-9**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`2`: Aus `1`"$0 \leq \mathsf{ab2}(x) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{ab2}(x) \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 < \mathsf{ab2}(x)$.

`3`: Aus `2`"$0 < \mathsf{ab2}(x)$" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

Beweis **128-10** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $0 < \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

1: Aus VS gleich "$0 < \mathsf{ab2}(x) \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \le \mathsf{ab2}(x)$.

2: Aus 1"$0 \le \mathsf{ab2}(x) \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

3: Aus VS gleich "$0 < \mathsf{ab2}(x) \ldots$" und
aus 2"$\mathsf{ab2}(x) < +\infty$"
folgt: $0 < \mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $0 < \mathsf{ab2}(x) < +\infty$.

1: Aus VS gleich "$0 < \mathsf{ab2}(x) \ldots$"
folgt via **41-3**: $(0 \le \mathsf{ab2}(x)) \wedge (0 \neq \mathsf{ab2}(x))$.

2.1: Aus 1"$0 \le \mathsf{ab2}(x) \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ab2}(x) < +\infty$"
folgt via **128-9**: $x \in \mathbb{C}$.

2.2: Aus 1"$\ldots 0 \neq \mathsf{ab2}(x)$"
folgt via **128-3**: $0 \neq x$.

3: Aus 2.2"$0 \neq x$" und
aus 2.1"$x \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

$\square$

128-11. Mit dem folgenden Kriterium wird unter anderem die Basis für den Beweis von "$\mathsf{ab2}:\mathbb{A}\to\mathbb{T}$", siehe **128-13**, gelegt:

128-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Zahl.*

`ii)` $\mathsf{ab2}(x)\in\mathbb{T}$.

`iii)` $\mathsf{ab2}(x)$ *Menge.*

`iv)` $\mathsf{ab2}(x)\neq\mathcal{U}$.

Beweis **128-11**

`REIM.RECH`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)}\Rightarrow\texttt{ii)}}$ `VS` gleich x Zahl.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x\in\mathbb{T}$.

`1.3:` Via **96-22** gilt: $\mathsf{ab2}(x)=(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}$" und
aus `1.1`"$\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)\in\mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{Im}x\in\mathbb{T}$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Im}x\in\mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)\in\mathbb{T}$.

`3:` Aus `2.1`"$(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)\in\mathbb{T}$" und
aus `2.2`"$(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)\in\mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)\in\mathbb{T}$.

`4:` Aus `1.3`"$\mathsf{ab2}(x)=(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)$" und
aus `3`"$(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)\in\mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{ab2}(x)\in\mathbb{T}$.

<u>Beweis **128-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

Aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{ab2}(x)$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x)$ Menge.

Aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x)$ Menge"
folgt via **0-17**: $\mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$.

`1`: Aus **96-22**"$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $x \in \mathbb{A}$.

`2`: Aus `1`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

$\square$

128-12. Aus **128-11** folgt via Negation ein Kriterium für $x \notin \mathbb{A}$:

128-12(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \notin \mathbb{A}$.

`ii)` $\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{T}$.

`iii)` $\mathsf{ab2}(x)$ *Unmenge.*

`iv)` $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

Beweis **128-12**

`1:` Via **128-11** gilt:

$$x \text{ Zahl} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \text{ Menge.} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}.$$

`2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$.

`3:` Aus `1`“$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{ab2}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U})$” und aus `2`“$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$”
folgt:

$$x \in \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \text{ Menge.} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \neq \mathcal{U}.$$

`4:` Aus `3`
folgt:

$$x \notin \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{T} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) \text{ Unmenge.} \Leftrightarrow \mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}.$$

□

128-13. In genauerer Formulierung als in **96-22** gilt:

128-13(Satz)

$$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}.$$

Beweis **128-13**

`1:` Aus **96-22**"$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\mathsf{ab2}\ \text{Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A})$.

`Thema2.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$.

`3:` Aus `1`"$\mathsf{ab2}$ Funktion… " und
aus `Thema2.1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$"
folgt via **18-24**: $\exists\Omega : (\alpha = \mathsf{ab2}(\Omega)) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}))$.

`4:` Aus `3`"$\ldots\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2})$" und
aus `1`"$\ldots\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{A}$.

`5:` Aus `4`"$\Omega \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: Ω Zahl.

`6:` Aus `5`"Ω Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(\Omega) \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `3`"$\ldots\alpha = \mathsf{ab2}(\Omega)\ldots$" und
aus `5`"$\mathsf{ab2}(\Omega) \in \mathbb{T}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{T}$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{T})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) \subseteq \mathbb{T}$"

`2.2:` Aus `1`"$\mathsf{ab2}$ Funktion… ",
aus `1`"$\ldots\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$" und
aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$.

□

128-14. Es gilt unter anderem $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$ oder $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$ oder $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$:

128-14(Satz)

a) "$0 \leq \mathsf{ab2}(x)$" *oder* "$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$" *oder* "$\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$".

b) "$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$".

c) $\neg(\mathsf{ab2}(x) < 0)$.

d) $\mathsf{ab2}(x) \neq -\infty$.

$\leq$-Notation.

Beweis **128-14** a)

1: Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \in \mathbb{A}$.

2: Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall $x \in \mathbb{B}$.

3: Aus 2.1.Fall“$x \in \mathbb{B}$”
folgt via **128-5**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

4: Aus 3
folgt: $(0 \leq \mathsf{ab2}(x)) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

2.2.Fall $x \notin \mathbb{B}$.

3: Aus 1.1.Fall“$x \in \mathbb{A}$” und
aus 2.2.Fall“$x \notin \mathbb{B}$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

4: Aus 3“$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$”
folgt via **128-7**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

5: Aus 4
folgt: $(0 \leq \mathsf{ab2}(x)) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$(0 \leq \mathsf{ab2}(x)) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2: Aus 1.2.Fall“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **128-12**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

3: Aus 2
folgt: $(0 \leq \mathsf{ab2}(x)) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

$(0 \leq \mathsf{ab2}(x)) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

Beweis **128-14** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **128-12**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

Beweis **128-14** `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$$(0 \leq \mathsf{ab2}(x)) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \leq \mathsf{ab2}(x)$.

Aus `1.1.Fall`“$0 \leq \mathsf{ab2}(x)$”
folgt via **107-13**: $\neg(\mathsf{ab2}(x) < 0)$.

`1.2.Fall` $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-21**: $\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{S}$”
folgt via **107-21**: $\neg(\mathsf{ab2}(x) < 0)$.

`1.3.Fall` $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$”
folgt via **94-1**: $\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{S}$”
folgt via **107-21**: $\neg(\mathsf{ab2}(x) < 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\neg(\mathsf{ab2}(x) < 0)$.

<u>Beweis **128-14**</u> `d)`

`1:` Es gilt: $(\mathsf{ab2}(x) = -\infty) \vee (\neg(\mathsf{ab2}(x) = -\infty))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{ab2}(x) = -\infty$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{ab2}(x) = -\infty$" und
aus **107-6** "$-\infty < 0$
folgt: $\mathsf{ab2}(x) < 0$.

`3:` Es gilt `2` "$\mathsf{ab2}(x) < 0$" .
Via des bereits bewiesenen `c)` gilt "$\neg(\mathsf{ab2}(x) < 0)$" .
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{ab2}(x) \neq -\infty$.

`2.2.Fall` $\neg(\mathsf{ab2}(x) = -\infty)$.

Aus `2.2.Fall`
folgt: $\mathsf{ab2}(x) \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{ab2}(x) \neq -\infty$.

□

128-15. Es gilt stets $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$:

128-15(Satz)

$$\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x).$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **128-15**

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

2: Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

3.1: Aus 2“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$” folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{ab2}(x))$.

3.2: Aus 2“$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$” folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x)) = 0$.

4:
$$\begin{aligned}
&\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x))\\
&\overset{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{ab2}(x)) \cdot \mathsf{Re}(\mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x)) \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x))\\
&\overset{3.1}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x)) \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x))\\
&\overset{3.2}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x) + 0 \cdot 0\\
&\overset{\mathbf{98-16}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x) + 0\\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x).
\end{aligned}$$

5: Aus 4 folgt: $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

2: Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **128-12**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

3: $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) \overset{2}{=} \mathsf{ab2}(\mathcal{U}) \overset{\mathbf{96-22}}{=} \mathcal{U} \overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot \mathcal{U} \overset{2}{=} \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

4: Aus 3 folgt: $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x).$$

$\square$

Weiteres über $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 23/02/12**

129-1. Falls $0 \neq x \in \mathbb{T}$, dann folgt unter anderem $x \cdot (\pm\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$:

129-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $0 \neq x \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x = \mathsf{nan}$.

b) "$x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}$" *oder* "$x \cdot (+\infty) = +\infty$" *oder* "$x \cdot (+\infty) = -\infty$".

c) "$(+\infty) \cdot x = \mathsf{nan}$" *oder* "$(+\infty) \cdot x = +\infty$" *oder* "$(+\infty) \cdot x = -\infty$".

d) "$x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}$" *oder* "$x \cdot (-\infty) = +\infty$" *oder* "$x \cdot (-\infty) = -\infty$".

e) "$(-\infty) \cdot x = \mathsf{nan}$" *oder* "$(-\infty) \cdot x = +\infty$" *oder* "$(-\infty) \cdot x = -\infty$".

f) "$x \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" *und* "$\mathsf{nan} \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$".

g) "$x \cdot (+\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" *und* "$(+\infty) \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$".

h) "$x \cdot (-\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" *und* "$(-\infty) \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **129-1** a)

Aus $\rightarrow)$ "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x = \mathsf{nan}$.

Beweis **129-1** `b)`

`1:` Aus →) "$\ldots x \in \mathbb{T}$"
folgt via **107-19**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus 2"$(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$"
und aus →) "$0 \neq x \ldots$"
folgt: $(x < 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < 0$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x < 0$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = -\infty$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty)$.

`2.2.Fall` $0 < x$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$0 < x$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty)$.

`2.3.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`3:` $x \cdot (+\infty) \stackrel{\texttt{2.3.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{97\text{-}5}}{=} \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`"$x \cdot (+\infty) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty).$$

<u>Beweis **129-1** `c)`</u>

`1:` Aus $\rightarrow)$ "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty).$$

`2:` Via **KGM** gilt: $$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x.$$

`3:` Aus `1`"$(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty)$" und
aus `2`"$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$"
folgt: $$((+\infty) \cdot x = \mathsf{nan}) \vee ((+\infty) \cdot x = +\infty) \vee ((+\infty) \cdot x = -\infty).$$

Beweis **129-1** `d)`

`1:` Aus →) "... $x \in \mathbb{T}$"
folgt via **107-19**: $(x<0) \vee (x=0) \vee (0<x) \vee (x=\mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1` "$(x<0) \vee (x=0) \vee (0<x) \vee (x=\mathsf{nan})$"
und aus →) "$0 \neq x \ldots$"
folgt: $(x<0) \vee (0<x) \vee (x=\mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x<0$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$x<0$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty)$.

`2.2.Fall` $0<x$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$0<x$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty)$.

`2.3.Fall` $x=\mathsf{nan}$.

`3:` $x \cdot (-\infty) \stackrel{\texttt{2.3.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3` "$x \cdot (-\infty) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty).$$

<u>Beweis **129-1**</u> `e)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty).$$

`2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x.$

`3:` Aus `1` "$(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty)$" und
aus `2` "$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$"
folgt: $((-\infty) \cdot x = \mathsf{nan}) \vee ((-\infty) \cdot x = +\infty) \vee ((-\infty) \cdot x = -\infty).$

`f)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot x = \mathsf{nan}.$

`2.1:` Aus `1` "$x \cdot \mathsf{nan} = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **104-1**: $x \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}.$

`2.2:` Aus `1` "$\ldots \mathsf{nan} \cdot x = \mathsf{nan}$"
folgt via **104-1**: $\mathsf{nan} \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}.$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{nan} \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}).$

`g)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty).$$

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$((+\infty) \cdot x = \mathsf{nan}) \vee ((+\infty) \cdot x = +\infty) \vee ((+\infty) \cdot x = -\infty).$$

`2.1:` Aus `1.1` "$(x \cdot (+\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (+\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (+\infty) = -\infty)$"
folgt via **104-1**: $x \cdot (+\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}.$

`2.2:` Aus `1.2` "$((+\infty) \cdot x = \mathsf{nan}) \vee ((+\infty) \cdot x = +\infty) \vee ((+\infty) \cdot x = -\infty)$"
folgt via **104-1**: $(+\infty) \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}.$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \cdot (+\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge ((+\infty) \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}).$

Beweis **129-1** `h)`

`1.1:` Aus →) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty).$$

`1.2:` Aus →) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$$((-\infty) \cdot x = \mathsf{nan}) \vee ((-\infty) \cdot x = +\infty) \vee ((-\infty) \cdot x = -\infty).$$

`2.1:` Aus `1.1` "$(x \cdot (-\infty) = \mathsf{nan}) \vee (x \cdot (-\infty) = +\infty) \vee (x \cdot (-\infty) = -\infty)$"
folgt via **104-1**: $x \cdot (-\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.2` "$((-\infty) \cdot x = \mathsf{nan}) \vee ((-\infty) \cdot x = +\infty) \vee ((-\infty) \cdot x = -\infty)$"
folgt via **104-1**: $(-\infty) \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x \cdot (-\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \wedge ((-\infty) \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})$.

□

129-2. Falls $0 \neq x \in \mathbb{T}$ und $y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$, dann $x \cdot y, y \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$:

129-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \neq x \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

b) $y \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **129-2** `a)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **104-1**: $(y = \mathsf{nan}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y = \mathsf{nan}$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via **129-1**: $x \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$x \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall`"$y = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via **129-1**: $x \cdot (+\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$x \cdot (+\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" und
aus `1.2.Fall`"$y = +\infty$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`1.3.Fall` $y = -\infty$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$"
folgt via **129-1**: $x \cdot (-\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$x \cdot (-\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" und
aus `1.3.Fall`"$y = -\infty$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`b)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 \neq x \in \mathbb{T}$" und
aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`2:` Via **KGM** gilt: $y \cdot x = x \cdot y$.

`3:` Aus `2`"$y \cdot x = x \cdot y$" und
aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt: $y \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

□

Aus $x \in \mathbb{T}$ folgt $x : (x \cdot x) = 1 : x$.
Rechnen mit x mit $\mathsf{Re}x = 0$.
Rechnen mit x mit $\mathsf{Im}x = 0$.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 24/02/12**

130-1. Falls $x \in \mathbb{T}$, oder, spezieller, falls $0 \neq x \in \mathbb{R}$, dann $x : (x \cdot x) = 1 : x$. Der Beweis zieht sich ein wenig:

<u>**130-1(Satz)**</u>

`a)` *Aus* "$0 \neq x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x : (x \cdot x) = 1 : x$".

`b)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x : (x \cdot x) = 1 : x$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **130-1**</u> `a)` `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$",
aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **106-3**: $0 \neq x \cdot x$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.6:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot \mathsf{rez}(x) = 1$.

...

<u>Beweis **130-1**</u> `a)` `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

...

`2.1:` Aus `1.1`“$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

`2.2:` Aus `1.2`“$x \cdot x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(x \cdot x) \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `1.3`“$0 \neq x \cdot x$” und
aus `1.2`“$x \cdot x \in \mathbb{R}$”
folgt via **96-37**: $\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = 1$.

`2.4:` Aus `1.1`“$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{T}$.

`3.1:` Aus `2.1`“$\mathsf{rez}(x)$ Zahl”
folgt via **FSM**1: $1 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x)$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\mathsf{rez}(x \cdot x) \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{rez}(x \cdot x) \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `3.2`“$\mathsf{rez}(x \cdot x) \in \mathbb{T}$” und
aus `2.5`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AGM**$\mathbb{T}$: $\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = (\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x) \cdot x$

`4.2:` Aus `4.1`“$\mathsf{rez}(x \cdot x) \in \mathbb{T}$” und
aus `1.5`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x \in \mathbb{T}$.

`5.1:` Aus `4.2`“$\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x \in \mathbb{T}$” und
aus `2.4`“$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{T}$”
folgt via **AGM**$\mathbb{T}$:
$((\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x) \cdot x) \cdot \mathsf{rez}(x) = (\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x) \cdot (x \cdot \mathsf{rez}(x))$.

`5.2:` Aus `4.2`“$\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x \in \mathbb{T}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x$ Zahl.

`6:` Aus `5.2`“$\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x$ Zahl”
folgt via **FSM**1: $(\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x) \cdot 1 = \mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x$.

...

Beweis **130-1** `a)` `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

...

`7:` $$\mathsf{rez}(x) \stackrel{3.1}{=} 1 \cdot \mathsf{rez}(x) \stackrel{2.3}{=} (\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot (x \cdot x)) \cdot \mathsf{rez}(x) \stackrel{4.1}{=} ((\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x) \cdot x) \cdot \mathsf{rez}(x) \stackrel{5.1}{=} (\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x) \cdot (x \cdot \mathsf{rez}(x)) \stackrel{1.6}{=} (\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x) \cdot 1 \stackrel{6}{=} \mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x.$$

`8:` Aus `7` "$\mathsf{rez}(x) = \ldots = \mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x$"
folgt: $\mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x = \mathsf{rez}(x)$.

`9:` $$x : (x \cdot x) = x \cdot \mathsf{rez}(x \cdot x) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{rez}(x \cdot x) \cdot x \stackrel{8}{=} \mathsf{rez}(x) \stackrel{\mathbf{123-6}}{=} 1 : x.$$

`10:` Aus `9`
folgt: $x : (x \cdot x) = 1 : x$.

`b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**:
$$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty).$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **130-1** `b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:` $x : (x \cdot x) \overset{\text{2.1.Fall}}{=} 0 : (0 \cdot 0) \overset{\mathbf{98-16}}{=} 0 : 0 \overset{\mathbf{98-24}}{=} 0$
$\overset{\mathbf{98-24}}{=} 1 : 0 \overset{\text{2.1.Fall}}{=} 1 : x$.

`4:` Aus `3` folgt: $x : (x \cdot x) = 1 : x$.

`2.2.Fall` $0 \neq x$.

Aus `2.2.Fall`“$0 \neq x$” und
aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x : (x \cdot x) = 1 : x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x : (x \cdot x) = 1 : x$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` $x : (x \cdot x) \overset{\text{1.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} : (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \overset{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} : \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$
$\overset{\mathbf{123-11}}{=} 1 : \mathsf{nan} \overset{\text{1.2.Fall}}{=} 1 : x$.

`3:` Aus `2` folgt: $x : (x \cdot x) = 1 : x$.

...

<u>Beweis **130-1**</u> `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $x = +\infty$.

2: $x : (x \cdot x) \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} (+\infty) : ((+\infty) \cdot (+\infty)) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (+\infty) : (+\infty) \stackrel{\textbf{97-5}}{=} 0$
$\stackrel{\textbf{123-11}}{=} 1 : (+\infty) \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} 1 : x.$

3: Aus 2
folgt: $x : (x \cdot x) = 1 : x.$

`1.4.Fall` $x = -\infty$.

2: $x : (x \cdot x) \stackrel{\text{1.4.Fall}}{=} (-\infty) : ((-\infty) \cdot (-\infty)) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) : (+\infty) \stackrel{\textbf{97-5}}{=} 0$
$\stackrel{\textbf{123-11}}{=} 1 : (-\infty) \stackrel{\text{1.4.Fall}}{=} 1 : x.$

3: Aus 2
folgt: $x : (x \cdot x) = 1 : x.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x : (x \cdot x) = 1 : x.$

□

130-2. Nun wird Einiges über Zahlen x mit $\mathsf{Re}x = 0$ bewiesen:

130-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\mathsf{Re}x = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

b) $x = \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

c) $-x = -\mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

d) $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = -x \cdot x$.

e) $1 : x = -\mathsf{i} : \mathsf{Im}x$.

f) $\mathsf{Re}(x + y) = \mathsf{Re}y$.

g) $x + y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y))$.

h) $\mathsf{Re}(x \cdot y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

i) $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

j) $x \cdot y = (\mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

k) $x \cdot y = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **130-2** `abcd)`</u>

`1.1:` Aus →) “ $\mathsf{Re}x = 0$ ”
folgt via **127-4**: x Zahl.

`1.2:` Aus →) “ $\mathsf{Re}x = 0$ ”
folgt via **127-3**: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.a):` Aus `1.1` “ x Zahl ”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.1` “ x Zahl ”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3.1:` $x \stackrel{2.1}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\rightarrow)}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3.2:`
$$\mathsf{ab2}(x)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\rightarrow)}{=} 0 \cdot 0 + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} 0 + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x).$$

`3.3:` $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \stackrel{1.2}{=} -x \cdot x$.

`4.b):` Aus `3.1`
folgt: $x = \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4.1:` Aus `3.2`
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`5.c):` Aus `4.b)` “ $x = \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$ ”
folgt: $-x = -\mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`5.d):` Aus `4.1` “ $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$ ” und
aus `3.3` “ $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \ldots = -x \cdot x$ ”
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = -x \cdot x$.

<u>Beweis **130-2** `e)`</u>

`1.1:` Aus →) "$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **127-4**: x Zahl.

`1.2:` Aus →) "$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.1:` Aus `1.1`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1.1`"x Zahl"
folgt via **128-1**: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **130-1**: $(\mathsf{Im}x) : ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) = 1 : \mathsf{Im}x$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **FSD**0: $0 : \mathsf{ab2}(x) = 0$.

`4:`

$$\begin{aligned}
& 1 : x \\
&\overset{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\
&\overset{\rightarrow)}{=} (0 : \mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\
&\overset{3.2}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\
&= \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))) \\
&\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{i} \cdot (-((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))) \\
&\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))) \\
&= -\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\
&\overset{1.2}{=} -\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) : ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x))) \\
&\overset{3.1}{=} -\mathsf{i} \cdot (1 : \mathsf{Im}x) \\
&\overset{\mathbf{123-6}}{=} -\mathsf{i} \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{Im}x) \\
&= -\mathsf{i} : \mathsf{Im}x.
\end{aligned}$$

`5:` Aus 4
folgt: $1 : x = -\mathsf{i} : \mathsf{Im}x$.

Beweis **130-2** `f)`

`1:` $$\mathsf{Re}(x+y) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \stackrel{\to)}{=} 0 + (\mathsf{Re}y) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{Re}y.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$\mathsf{Re}(x+y) = \mathsf{Re}y.$$

`g)`

`1:` Aus →) “ $\mathsf{Re}x = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $$\mathsf{Re}(x+y) = \mathsf{Re}y.$$

`2:` $$\begin{aligned} x+y &\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Re}(x+y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x+y) \\ &\stackrel{1}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x+y) \\ &\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)). \end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$x+y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)).$$

Beweis **130-2** `h)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` y Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“y Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}y$ Zahl.

`3:` Aus 2“$\mathsf{Re}y$ Zahl… ”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Re}y) = 0$.

`4:`
$$\mathsf{Re}(x \cdot y) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{\to)}{=} 0 \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{3}{=} 0 - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$$

`5:` Aus 4
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}y = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Re}(x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -(\mathsf{Im}x) \cdot \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`4:` Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{Re}(x \cdot y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

Beweis **130-2** `i)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` y Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}y$ Zahl.

`3:` Aus 2"$\mathsf{Im}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Im}y) = 0$.

`4:`
$$\mathsf{Im}(x \cdot y) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \stackrel{\to)}{=} 0 \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \stackrel{3}{=} 0 + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Im}(x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathsf{Im}x) \cdot \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

<u>Beweis</u> **130-2** `j)`

`1:`

$$x \cdot y$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\rightarrow)}{=} (0 + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$x \cdot y = (\mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`k)`

`1.1:` Aus →) “$\mathsf{Re}x = 0$”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $$\mathsf{Re}(x \cdot y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$$

`1.2:` Aus →) “$\mathsf{Re}x = 0$”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $$\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y).$$

`2:`

$$x \cdot y$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$

$$\stackrel{1.1}{=} -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$

$$\stackrel{1.2}{=} -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$x \cdot y = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

□

130-3. Nun wird Einiges über Zahlen x mit $\mathsf{Im}x = 0$ - also über treelle Zahlen - bewiesen:

130-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\mathsf{Im}x = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

b) $x = \mathsf{Re}x$.

c) $-x = -\mathsf{Re}x$.

d) $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) = x \cdot x$.

e) $1 : x = 1 : \mathsf{Re}x$.

f) $\mathsf{Re}(x + y) = x + \mathsf{Re}y$.

g) $\mathsf{Im}(x + y) = \mathsf{Im}y$.

h) $x + y = (x + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$.

i) $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Re}y$.

j) $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Im}y$.

k) $x \cdot y = x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **130-3** `abcdefgh)`

1: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x = \mathsf{Re}x)$.

2.a): Aus 1"$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus 1"$\ldots x = \mathsf{Re}x$"
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

...

<u>Beweis</u> **130-3** `abcdefgh)` ...

`2.b)`: Aus `1` folgt: $x = \mathsf{Re}x$.

`2.c)`: Aus `1`"$\ldots x = \mathsf{Re}x$" folgt: $-x = -\mathsf{Re}x$.

`2.1`:
$$\mathsf{ab2}(x) \overset{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x) \overset{\rightarrow)}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x) + 0\cdot 0 \overset{\mathbf{98-16}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x) + 0 \overset{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x).$$

`2.2`: Aus `1`"$\ldots x = \mathsf{Re}x$" folgt: $x\cdot x = (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)$.

`3.d)`: Aus `2.1`"$\mathsf{ab2}(x) = \ldots = (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)$" und aus `2.2`"$x\cdot x = (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)$" folgt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x) = x\cdot x$.

`3.e)`: Aus `2.b)`"$x = \mathsf{Re}x$" folgt: $1 : x = 1 : \mathsf{Re}x$.

`3.1`: $\mathsf{Re}(x+y) \overset{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \overset{\text{2.b)}}{=} x + \mathsf{Re}y$.

`3.2`: $\mathsf{Im}(x+y) \overset{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) \overset{\rightarrow)}{=} 0 + (\mathsf{Im}y) \overset{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{Im}y$.

`4.f)`: Aus `3.1` folgt: $\mathsf{Re}(x+y) = x + \mathsf{Re}y$.

`4.g)`: Aus `3.2` folgt: $\mathsf{Im}(x+y) = \mathsf{Im}y$.

`5`:
$$x+y \overset{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Re}(x+y) + \mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x+y) \overset{\text{4.f)}}{=} (x + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x+y) \overset{\text{4.g)}}{=} (x + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y).$$

`6.h)`: Aus `5` folgt: $x + y = (x + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y)$.

Beweis **130-3** `i)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **FS$\mathbb{T}$**: $x = \mathsf{Re}x.$

`2:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` y Zahl.

`3:` Aus `2.1.Fall`"y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}y$ Zahl.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{Im}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Im}y) = 0.$

`5:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x \cdot y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)\\
&\stackrel{\rightarrow)}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0 \cdot (\mathsf{Im}y)\\
&\stackrel{4}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)\\
&\stackrel{1}{=} x \cdot \mathsf{Re}y.
\end{aligned}$$

`6:` Aus `5`
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Re}y.$

`2.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}.$

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}.$

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}.$

`4:` $\mathsf{Re}(x \cdot y) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{3.2}{=} x \cdot \mathsf{Re}y.$

`5:` Aus `4`
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Re}y.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Re}y.$

Beweis **130-3** j)

1: Aus $\rightarrow$) " $\mathsf{Im}x = 0$ "
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

2: Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall y Zahl.

3: Aus 2.1.Fall "y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}y$ Zahl.

4: Aus 3 "$\mathsf{Re}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Re}y) = 0$.

5: $\mathsf{Im}(x \cdot y)$

$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$

$\stackrel{\rightarrow)}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \cdot (\mathsf{Re}y)$

$\stackrel{4}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0$

$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$

$\stackrel{1}{=} x \cdot \mathsf{Im}y.$

5: Aus 4
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Im}y$.

1.2.Fall $y \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}y = \mathcal{U}$.

3: $\mathsf{Im}(x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} x \cdot \mathsf{Im}y$.

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Im}y$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Im}y$.

<u>Beweis **130-3** `k)`</u>

`1.1:` Aus →) “ $\mathsf{Im}x = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = x \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`1.2:` Aus →) “ $\mathsf{Im}x = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`2:`

$$x \cdot y$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$

$$\stackrel{1.1}{=} x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$

$$\stackrel{1.2}{=} x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $x \cdot y = x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))$.

□

Einiges über die Lokalisierung von $x \cdot y$ in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{S}$, in $\mathbb{T}$.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 24/02/12**

131-1. Falls das Produkt einer treellen Zahl $x \neq 0$ mit y in $\mathbb{T}, \mathbb{S}, \mathbb{R}$ ist, dann ist y in $\mathbb{T}, \mathbb{S}, \mathbb{R}$:

131-1(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq x \in \mathbb{T}$" *und* "$x \cdot y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$y \in \mathbb{T}$".

b) *Aus* "$0 \neq x \in \mathbb{T}$" *und* "$x \cdot y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$y \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$0 \neq x \in \mathbb{T}$" *und* "$x \cdot y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$y \in \mathbb{R}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **131-1**

REIM.-**Notation**

...

<u>Beweis **131-1**</u> ...

a) VS gleich $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{T})$.

1.1: Aus VS gleich "... $x \in \mathbb{T}$ ..."
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

1.2: Aus VS gleich "... $x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot y$ Menge.

1.3: Aus VS gleich "... $x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0$.

2.1: Aus 1.1 "$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Im}y$.

2.2: Aus 1.2 "$x \cdot y$ Menge"
folgt via **96-15**: y Zahl.

3.1: Aus 1.3 "$\mathsf{Im}(x \cdot y) = 0$" und
aus 2.1 "$\mathsf{Im}(x \cdot y) = x \cdot \mathsf{Im}y$"
folgt: $x \cdot \mathsf{Im}y = 0$.

3.2: Aus 2.2 "y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$.

4: Aus VS gleich "... $x \in \mathbb{T}$ ...",
aus 3.2 "$\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$" und
aus 3.1 "$x \cdot \mathsf{Im}y = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(x = 0) \vee (\mathsf{Im}y = 0)$.

5: Aus 4 "$(x = 0) \vee (\mathsf{Im}y = 0)$" und
aus VS gleich "$0 \neq x$ ..."
folgt: $\mathsf{Im}y = 0$.

6: Aus 5 "$\mathsf{Im}y = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y \in \mathbb{T}$.

Beweis **131-1** `b)` `VS` gleich $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $y \in \mathbb{S}$.

`3.2.Fall` $y = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" und
aus `3.2.Fall`"$y = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5`"$x \cdot y = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-21**: $x \cdot y \notin \mathbb{S}$.

`7:` Es gilt `6`"$x \cdot y \notin \mathbb{S}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \in \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y \in \mathbb{S}$.

`c)` `VS` gleich $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $y \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **131-1** `c)` `VS` gleich $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{R})$.

...

`3:` Aus 2"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`3.2.Fall` $y = +\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **129-1**: $x \cdot (+\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5:` Aus 4"$x \cdot (+\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" und
aus `3.2.Fall`"$y = +\infty$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus 5"$x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $x \cdot y \notin \mathbb{R}$.

`7:` Es gilt 6"$x \cdot y \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \in \mathbb{S}$.

`3.3.Fall` $y = -\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **129-1**: $x \cdot (-\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`5:` Aus 4"$x \cdot (-\infty) \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" und
aus `3.3.Fall`"$y = -\infty$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`6:` Aus 5"$x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $x \cdot y \notin \mathbb{R}$.

`7:` Es gilt 6"$x \cdot y \notin \mathbb{R}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \in \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $y \in \mathbb{R}$.

□

131-2. Falls das Produkt einer treellen Zahl x mit y in $\mathbb{T}, \mathbb{S}, \mathbb{R}$ *und* ungleich0 ist, dann gilt $0 \neq x \in \mathbb{T}$ und $0 \neq y \in \mathbb{T}, \mathbb{S}, \mathbb{R}$:

131-2(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt "$0 \neq x \in \mathbb{T}$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{T}$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt "$0 \neq x \in \mathbb{S}$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \neq x \in \mathbb{R}$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{R}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **131-2** a) VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot y$ Menge.

2: Aus 1"$x \cdot y$ Menge"
folgt via **96-15**: y Zahl.

3.1: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **131-2** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.1.1.Fall` $x = 0$.

`4:` Aus `2`"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`5:` Aus `3.1.1.Fall`"$x = 0$" und
aus `4`"$0 \cdot y = 0$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

`6:` Es gilt `5`"$x \cdot y = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x \cdot y \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x$.

`3.1.2.Fall` $0 \neq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq x$"

`3.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3.2`"$0 \neq x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **131-1**: $y \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x \cdot y \ldots$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$",
aus `4`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **111-3**: $0 \neq y$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq y$" und
aus `4`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `3.2`"$0 \neq x \in \mathbb{T}$" und
aus `6`"$0 \neq y \in \mathbb{T}$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$.

<u>Beweis **131-2**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq x \cdot y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x \cdot y \ldots$" und
aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$.

`3.1:` Aus `2`"$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $y \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{S}$" und
aus `3.2`"$x \cdot y = y \cdot x$"
folgt: $y \cdot x \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{T}$" und
aus `4`"$y \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $x \in \mathbb{S}$.

`6.1:` Aus `2`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `5`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

`6.2:` Aus `2`"$\ldots 0 \neq y \ldots$" und
aus `3.1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{S}$.

`7:` Aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$.

<u>Beweis **131-2**</u> `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq x \cdot y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq x \cdot y \ldots$" und
aus `1`"$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(0 \neq x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{T})$.

`3.1:` Aus `2`"$0 \neq x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **131-1**: $y \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{R}$" und
aus `3.2`"$x \cdot y = y \cdot x$"
folgt: $y \cdot x \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{T}$" und
aus `4`"$y \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via **131-1**: $x \in \mathbb{R}$.

`6.1:` Aus `2`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `5`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`6.2:` Aus `2`"$\ldots 0 \neq y \ldots$" und
aus `3.1`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `6.1` und
aus `6.2`
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

$\square$

131-3. Aus $x \in \mathbb{T}$ und $0 < x \cdot y$ folgt $0 < x, y$ oder $x, y < 0$ - also im Speziellen auch $x, y \in \mathbb{S}$. Ähnliches folgt aus $x \in \mathbb{T}$ und $x \cdot y < 0$:

131-3(Satz)

`a)` *Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$0 < x \cdot y$"*
folgt "$(0 < x) \wedge (0 < y)$" oder "$(x < 0) \wedge (y < 0)$".

`b)` *Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$x \cdot y < 0$" folgt "$y < 0 < x$" oder "$x < 0 < y$".*

`RECH.`**$\leq$-Notation**.

Beweis **131-3** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 < x \cdot y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < x \cdot y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x \cdot y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < x \cdot y$"
folgt via **107-9**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `1.1`"$0 \neq x \cdot y$" und
aus `1.2`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-2**: $(0 \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(y < 0) \vee (y = 0) \vee (0 < y)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$" und
aus `2`"$0 \neq x \ldots$"
folgt: $(x < 0) \vee (0 < x)$.

`4.2:` Aus `3.2`"$(y < 0) \vee (y = 0) \vee (0 < y)$" und
aus `2`"$\ldots 0 \neq y \ldots$"
folgt: $(y < 0) \vee (0 < y)$.

...

<u>Beweis **131-3**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 < x \cdot y)$.

...

`5:` Aus `4.1`“$(x < 0) \vee (0 < x)$” und
aus `4.2`“$(y < 0) \vee (0 < y)$”
folgt:
$$\begin{aligned} & (x < 0) \wedge (y < 0) \\ \vee\ & (x < 0) \wedge (0 < y) \\ \vee\ & (0 < x) \wedge (y < 0) \\ \vee\ & (0 < x) \wedge (0 < y). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $(x < 0) \wedge (y < 0)$.

Aus `5.1.Fall`
folgt: $((0 < x) \wedge (0 < y)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$.

`5.2.Fall` $(x < 0) \wedge (0 < y)$.

`6:` Aus `5.2.Fall`“$x < 0 \ldots$” und
aus `5.2.Fall`“$\ldots 0 < y$”
folgt via **112-2**: $x \cdot y < 0$.

`7:` Aus `6`“$x \cdot y < 0$”
folgt via **107-13**: $\neg(0 < x \cdot y)$.

`8:` Es gilt `7`“$\neg(0 < x \cdot y)$”.
Es gilt `VS` gleich “$\ldots 0 < x \cdot y$”.
Ex falso quodlibet folgt: $((0 < x) \wedge (0 < y)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$.

`5.3.Fall` $(0 < x) \wedge (y < 0)$.

`6:` Aus `5.3.Fall`“$0 < x \ldots$” und
aus `5.3.Fall`“$\ldots y < 0$”
folgt via **112-1**: $x \cdot y < 0$.

`7:` Aus `6`“$x \cdot y < 0$”
folgt via **107-13**: $\neg(0 < x \cdot y)$.

`8:` Es gilt `7`“$\neg(0 < x \cdot y)$”.
Es gilt `VS` gleich “$\ldots 0 < x \cdot y$”.
Ex falso quodlibet folgt: $((0 < x) \wedge (0 < y)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$.

...

<u>Beweis **131-3**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 < x \cdot y)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{5.4.Fall}}$ $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

Aus `5.4.Fall`
folgt: $((0 < x) \wedge (0 < y)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:
$((0 < x) \wedge (0 < y)) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$.

`b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot y < 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -x \cdot y$.

`2:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $-x \cdot y = x \cdot (-y)$.

`3:` Aus `1`"$0 < -x \cdot y$" und
aus `2`"$-x \cdot y = x \cdot (-y)$"
folgt: $0 < x \cdot (-y)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3`"$0 < x \cdot (-y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$((0 < x) \wedge (0 < -y)) \vee ((x < 0) \wedge (-y < 0))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **131-3**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot y < 0)$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $(0 < x) \wedge (0 < -y)$.

`5:` Aus `4.1.Fall`“$\ldots 0 < -y$”
folgt via **109-16**: $y < 0$.

`6:` Aus `5`“$y < 0$” und
aus `4.1.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt: $y < 0 < x$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(y < 0 < x) \vee (x < 0 < y)$.

`4.2.Fall` $(x < 0) \wedge (-y < 0)$.

`5:` Aus `4.2.Fall`“$\ldots - y < 0$”
folgt via **109-16**: $0 < y$.

`6:` Aus `4.2.Fall`“$x < 0 \ldots$” und
aus `5`“$0 < y$”
folgt: $x < 0 < y$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(y < 0 < x) \vee ((x < 0 < y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(y < 0 < x) \vee (x < 0 < y).$$

□

Einiges über die Lokalisierung von $x \cdot y$ in $\mathbb{C}$, in $\mathbb{B}$.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 24/02/12**

132-1. Falls das Produkt einer Klasse $x \neq 0$ mit y in $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ ist, dann ist x eine Zahl und y ist in $\mathbb{B}, \mathbb{C}$. Die korrespondierende Aussage mit "$\mathbb{A}$" an Stelle von "$\mathbb{B}$" (oder "$\mathbb{C}$") ist gemäß **96-15** auch ohne Voraussetzung "$0 \neq x$" gültig:

132-1(Satz)

a) *Aus "$0 \neq x$" und "$x \cdot y \in \mathbb{B}$" folgt "x Zahl" und "$y \in \mathbb{B}$".*

b) *Aus "$0 \neq x$" und "$x \cdot y \in \mathbb{C}$" folgt "x Zahl" und "$y \in \mathbb{C}$".*

`RECH.`-**Notation**

Beweis **132-1**

`REIM`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{B}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot y$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $(\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \cdot y$ Menge"
folgt via **96-15**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`2.2:` Aus **96-26**"$\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

`2.3:` Aus **96-26**"$\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{S}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$.

...

<u>Beweis **132-1**</u> `a)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{C})$.

...

`3.1:` Aus `2.1`“x Zahl... ”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.2:` Aus `2.1`“... y Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`3.3:` Aus “$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$” und
aus `2.2`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \in \mathbb{S}$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `3.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

`4.2:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `3.2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`5.1:` Aus `4.1`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$” und
aus `3.3`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \in \mathbb{S}$”
folgt via **109-4**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}) \wedge (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S})$.

`5.2:` Aus `4.2`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$” und
aus `2.3`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$”
folgt via **109-4**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S})$.

`6:` Aus `5.1`“$\ldots - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$”
folgt via **117-4**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **132-1** `a)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{C})$.

...

`7.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **96-32**: $(0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x)$.

`Fallunterscheidung`

`7.1.1.Fall` $0 \neq \mathsf{Re}x$.

`8.1:` Aus `7.1.1.Fall`"$0 \neq \mathsf{Re}x$",
aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `5.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$.

`8.2:` Aus `7.1.1.Fall`"$0 \neq \mathsf{Re}x$",
aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `5.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$.

`9:` Aus `8.1`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$" und
aus `8.2`"$\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $y \in \mathbb{B}$.

`7.1.2.Fall` $0 \neq \mathsf{Im}x$.

`8.1:` Aus `7.1.2.Fall`"$0 \neq \mathsf{Im}x$",
aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `5.2`"$\ldots (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$.

`8.2:` Aus `7.1.2.Fall`"$0 \neq \mathsf{Im}x$",
aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `6`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$.

`9:` Aus `8.1`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$" und
aus `8.2`"$\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $y \in \mathbb{B}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$y \in \mathbb{B}$"

`7.2:` Aus `2.1`"x Zahl..." und
aus `A1` gleich "$y \in \mathbb{S}$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

<u>Beweis **132-1**</u> `b) VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{C})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot y$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \cdot y$ Menge"
folgt via **96-15**: $(x$ Zahl$) \wedge (y$ Zahl$)$.

`2.2:` Aus **96-28**"$\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus **96-28**"$\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{R}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.1`"x Zahl$\ldots$"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.2:` Aus `2.1`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`3.3:` Aus "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$" und
aus `2.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \in \mathbb{R}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`5.1:` Aus `4.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$" und
aus `3.3`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \in \mathbb{R}$"
folgt via **109-6**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}) \wedge (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R})$.

`5.2:` Aus `4.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$" und
aus `2.3`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **109-6**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}) \wedge ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R})$.

`6:` Aus `5.1`"$\ldots - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$.

...

Beweis **132-1** `b)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (x \cdot y \in \mathbb{C})$.

...

`7.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **96-32**: $(0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x)$.

`Fallunterscheidung`

`7.1.1.Fall` $0 \neq \mathsf{Re}x$.

`8.1:` Aus `7.1.1.Fall` "$0 \neq \mathsf{Re}x$",
aus `3.1` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `5.1` "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

`8.2:` Aus `7.1.1.Fall` "$0 \neq \mathsf{Re}x$",
aus `3.1` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `5.2` "$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`9:` Aus `8.1` "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$" und
aus `8.2` "$\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $y \in \mathbb{C}$.

`7.1.2.Fall` $0 \neq \mathsf{Im}x$.

`8.1:` Aus `7.1.2.Fall` "$0 \neq \mathsf{Im}x$",
aus `3.1` "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `5.2` "$\ldots (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

`8.2:` Aus `7.1.2.Fall` "$0 \neq \mathsf{Im}x$",
aus `3.1` "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `6` "$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **131-1**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`9:` Aus `8.1` "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$" und
aus `8.2` "$\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $y \in \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$y \in \mathbb{C}$"

`7.2:` Aus `2.1` "x Zahl..." und
aus `A1` gleich "$y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

□

132-2. Falls $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{B}$, dann $0 \neq x, y \in \mathbb{B}$.
Falls $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$, dann $0 \neq x, y \in \mathbb{C}$:

132-2(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$0 \neq x \in \mathbb{B}$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{B}$".

b) *Aus* "$0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$0 \neq x \in \mathbb{C}$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{C}$".

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **132-2**</u> `a)` `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{B}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot y$ Menge.

`2:` Aus `1`"$x \cdot y$ Menge"
folgt via **96-15**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot y \ldots$",
aus `2`"x Zahl$\ldots$" und
aus `2`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **98-16**: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`4.1:` Aus `3`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{B}$"
folgt via **132-1**: $y \in \mathbb{B}$.

`4.2:` Via **KGM** gilt: $y \cdot x = x \cdot y$.

`5.1:` Aus `3`"$\ldots 0 \neq y$" und
aus `4.1`"$y \in \mathbb{B}$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{B}$.

`5.2:` Aus `4.2`"$y \cdot x = x \cdot y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot y \in \mathbb{B}$"
folgt: $y \cdot x \in \mathbb{B}$.

`6:` Aus `3`"$\ldots 0 \neq y$" und
aus `5.2`"$y \cdot x \in \mathbb{B}$"
folgt via **132-1**: $x \in \mathbb{B}$.

`7:` Aus `3`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `6`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{B}$.

`8:` Aus `7`"$0 \neq x \in \mathbb{B}$" und
aus `5.1`"$0 \neq y \in \mathbb{B}$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{B}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{B})$.

<u>Beweis **132-2**</u> `b)` `VS` gleich $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \cdot y \in \mathbb{C}$”
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot y$ Menge.

`2:` Aus `1`“$x \cdot y$ Menge”
folgt via **96-15**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`3:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \cdot y \ldots$”,
aus `2`“x Zahl…” und
aus `2`“$\ldots y$ Zahl”
folgt via **98-16**: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`4.1:` Aus `3`“$0 \neq x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \cdot y \in \mathbb{C}$”
folgt via **132-1**: $y \in \mathbb{C}$.

`4.2:` Via **KGM** gilt: $y \cdot x = x \cdot y$.

`5.1:` Aus `3`“$\ldots 0 \neq y$” und
aus `4.1`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{C}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$y \cdot x = x \cdot y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \cdot y \in \mathbb{C}$”
folgt: $y \cdot x \in \mathbb{C}$.

`6:` Aus `3`“$\ldots 0 \neq y$” und
aus `5.2`“$y \cdot x \in \mathbb{C}$”
folgt via **132-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`7:` Aus `3`“$0 \neq x$” und
aus `6`“$x \in \mathbb{C}$”
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`8:` Aus `7`“$0 \neq x \in \mathbb{C}$” und
aus `5.1`“$0 \neq y \in \mathbb{C}$”
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$.

□

132-3. Die Sonderrolle der 0 in **132-1,2** wird nun bezüglich $\mathbb{C}$ durch das folgende Kriterium belegt. Ein korrespondierendes Kriterium für "$\mathbb{B}$" an Stelle von "$\mathbb{C}$" ist, wie in **132-4,5** diskutiert, nicht verfügbar. Im Fall "$\mathbb{A}$" an Stelle von "$\mathbb{C}$" kann **96-15** zu Rate gezogen werden:

132-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`ii)` "$(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$" *oder* "$(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$" *oder* "$(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **132-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x \cdot y$ Menge.

`2:` Aus `1`"$x \cdot y$ Menge"
folgt via **96-15**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`3:` Es gilt:

$$x = 0$$
$$\vee \quad y = 0$$
$$\vee \quad (0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x = 0$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$x = 0$" und
aus `2`"$\ldots y$ Zahl"
folgt: $(x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`5:` Aus `4`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`3.2.Fall` $y = 0$.

`4:` Aus `2`"x Zahl$\ldots$" und
aus `3.2.Fall`"$y = 0$"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)$.

`5:` Aus `4`
folgt:

$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl}))$$
$$\vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0))$$
$$\vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

...

Beweis **132-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot y \in \mathbb{C}.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

`4.1:` Aus `3.3.Fall`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-1**: $y \in \mathbb{C}.$

`4.2:` Via **KGM** gilt: $y \cdot x = x \cdot y.$

`5.1:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots 0 \neq y$" und
aus `4.1`"$y \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq y \in \mathbb{C}.$

`5.2:` Aus `4.2`"$y \cdot x = x \cdot y$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt: $y \cdot x \in \mathbb{C}.$

`6:` Aus `3.3.Fall`"$\ldots 0 \neq y$" und
aus `5`"$y \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-1**: $x \in \mathbb{C}.$

`7:` Aus `3.3.Fall`"$0 \neq x \ldots$" und
aus `6`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}.$

`8:` Aus `7`"$0 \neq x \in \mathbb{C}$" und
aus `5.1`"$0 \neq y \in \mathbb{C}$"
folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C}).$

`9:` Aus `8`
folgt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee((0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{C})).$$

Beweis **132-3** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $((x=0)\wedge(y \text{ Zahl}))$ $\vee((x \text{ Zahl})\wedge(y=0))$ $\vee((0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x=0)\wedge(y \text{ Zahl})$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$\ldots y$ Zahl" folgt via **FSM**0: $0\cdot y=0$.

`3:` Aus `1.1.Fall` "$x=0\ldots$" und aus 2 "$0\cdot y=0$" folgt: $x\cdot y=0$.

`4:` Aus 3 "$x\cdot y=0$" und aus **101-5** "$0\in\mathbb{C}$" folgt: $x\cdot y\in\mathbb{C}$.

`1.2.Fall` $(x \text{ Zahl})\wedge(y=0)$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "x Zahl$\ldots$" folgt via **FSM**0: $x\cdot 0=0$.

`3:` Aus 2 "$x\cdot 0=0$" und aus `1.2.Fall` "$\ldots y=0$" folgt: $x\cdot y=0$.

`4:` Aus 3 "$x\cdot y=0$" und aus **101-5** "$0\in\mathbb{C}$" folgt: $x\cdot y\in\mathbb{C}$.

`1.3.Fall` $(0\neq x\in\mathbb{C})\wedge(0\neq y\in\mathbb{C})$.

Aus `1.3.Fall`$\ldots x\in\mathbb{C}\ldots$ und aus `1.3.Fall`$\ldots y\in\mathbb{C}$ folgt via $\cdot$**SZ**: $x\cdot y\in\mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x\cdot y\in\mathbb{C}$.

□

132-4. Unter Vorwegnahme folgenden Beispiels wird festgestellt, dass eine zu **132-3** korrespondierende Aussage mit "$\mathbb{B}$" an Stelle von "$\mathbb{C}$" nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

132-4.Bemerkung

Die Aussage
"$(x \cdot y \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((x = 0) \wedge (y \text{ Zahl})) \vee ((x \text{ Zahl}) \wedge (y = 0)) \vee ((0 \neq x \in \mathbb{B}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{B}))$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

132-5. Das folgende Beispiel belegt, dass eine zu **132-3** korrespondierende Aussage mit “$\mathbb{B}$” an Stelle von “$\mathbb{C}$” nicht ohne Weiteres verfügbar ist:

132-5.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = (+\infty) + \mathsf{i}$.

$\rightarrow$) $y = 1 + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $0 \neq x \in \mathbb{B}$.

b) $0 \neq y \in \mathbb{B}$.

c) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

d) $x \cdot y \notin \mathbb{B}$.

Einiges über $\mathsf{i} \cdot x$.

DistributivGesetze i.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 16/11/11**

133-1 Nun wird die Multiplikation mit i thematisisert:

133-1(Satz)

a) $\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x) = -\mathsf{Im}x$.

b) $\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x) = \mathsf{Re}x$.

c) $\mathsf{i}\cdot x = (-\mathsf{Im}x) + \mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

d) $\mathsf{ab2}(\mathsf{i}\cdot x) = \mathsf{ab2}(x)$.

REIM.RECH-**Notation**.

Beweis **133-1** ab)

1.1: Via **126-1** gilt: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$.

1.2: Via **126-1** gilt: $(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$.

2.1: Aus 1.1 "$(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$" folgt via **FSM**1: $1\cdot(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$.

2.2: Aus 1.2 "$(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathcal{U})$" folgt via **FSM**1: $1\cdot(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

3.1:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x)\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Rei})\cdot(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Imi})\cdot(\mathsf{Im}x)\\
&\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0\cdot(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Imi})\cdot(\mathsf{Im}x)\\
&\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0\cdot(\mathsf{Re}x) - 1\cdot(\mathsf{Im}x)\\
&\stackrel{2.2}{=} 0\cdot(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x).
\end{aligned}$$

3.2:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Rei})\cdot(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Imi})\cdot(\mathsf{Re}x)\\
&\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0\cdot(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Imi})\cdot(\mathsf{Re}x)\\
&\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0\cdot(\mathsf{Im}x) + 1\cdot(\mathsf{Re}x)\\
&\stackrel{2.1}{=} 0\cdot(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Re}x).
\end{aligned}$$

Beweis **133-1** `ab)`...

`4:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` x Zahl.

`5.1:` Aus `4.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

`5.2:` Aus `4.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

`6.1:` Aus `5.1`“$\mathsf{Re}x$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Re}x) = 0$.

`6.2:` Aus `5.2`“$\mathsf{Im}x$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$.

`7.1:` $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{3.1}{=} \ldots = 0 \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \stackrel{6.1}{=} 0 - (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} -\mathsf{Im}x$.

`7.2:` $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{3.2}{=} \ldots = 0 \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Re}x) \stackrel{6.2}{=} 0 + (\mathsf{Re}x) \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{Re}x$.

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = \mathsf{Re}x)$.

...

Beweis **133-1** `ab)` ...

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`5.1:` Aus `4.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $\mathsf{i} \cdot x = \mathcal{U}$.

`5.2:` Aus `4.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`5.3:` Aus `4.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`6.1:` $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{5.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`6.2:` $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{5.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`6.3:` $-\mathsf{Im}x \stackrel{5.3}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = \ldots = \mathcal{U}$" und
aus `6.3`"$-\mathsf{Im}x = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{Im}x$.

`7.2:` Aus `6.2`"$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = \ldots = \mathcal{U}$" und
aus `5.2`"$\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = \mathsf{Re}x$.

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = \mathsf{Re}x))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{Im}x) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = \mathsf{Re}x))$"

`5.a):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{Im}x$.

`5.b):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = \mathsf{Re}x$.

<u>Beweis **133-1**</u> `c)`

`1:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{i}\cdot x\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\\
&\overset{\mathtt{a)}}{=} (-\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\\
&\overset{\mathtt{b)}}{=} (-\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x).
\end{aligned}$$

`2:` Aus `1` folgt: $\mathsf{i}\cdot x=(-\mathsf{Im}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}x)$.

`d)`

`1:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{ab2}(\mathsf{i}\cdot x)\\
&\overset{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x)+\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\\
&\overset{\mathtt{a)}}{=} (-\mathsf{Im}x)\cdot(-\mathsf{Im}x)+\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\\
&\overset{\mathtt{b)}}{=} (-\mathsf{Im}x)\cdot(-\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)\\
&\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)\\
&\overset{\mathbf{FSA}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)\\
&\overset{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(x).
\end{aligned}$$

`2:` Aus `1` folgt: $\mathsf{ab2}(\mathsf{i}\cdot x)=\mathsf{ab2}(x)$.

$\square$

133-2. Die Multiplikation mit i hat die hier vorliegenden, unter anderem über das bislang verfügbare AssoziativGesetz Multiplikation in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{T}$ hinausgehenden, Eigenschaften:

133-2(Satz)

a) $\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot x) = -x$.

b) $(\mathsf{i} \cdot x) \cdot y = x \cdot (\mathsf{i} \cdot y) = \mathsf{i} \cdot (x \cdot y)$.

c) $(\mathsf{i} \cdot x) : y = x \cdot (\mathsf{i} : y) = \mathsf{i} \cdot (x : y)$.

d) $(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot y) = -x \cdot y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **133-2**

REIM-**Notation**.

---

a)

1:
$$\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot x)$$
$$\overset{\mathbf{133-1}}{=} (-\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x)$$
$$\overset{\mathbf{133-1}}{=} (-\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$$
$$\overset{\mathbf{96-27}}{=} -x.$$

2: Aus 1 folgt:
$$\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot x) = -x.$$

<u>Beweis</u> **133-2** `b)`

`1:` Via **133-1** gilt: $\mathsf{i}\cdot(x\cdot y)=(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x\cdot y)).$

`2.1:` $(\mathsf{i}\cdot x)\cdot y$

$$\stackrel{\textbf{96-26}}{=}(\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(\mathsf{Re}y)-\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(\mathsf{Im}y))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(\mathsf{Im}y)+\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\textbf{133-1}}{=}((-\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(\mathsf{Im}y))+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\textbf{133-1}}{=}((-\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=}(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=}(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+\mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(-((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))+\mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)))+\mathsf{i}\cdot(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\textbf{FS}+-}{=}(-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\textbf{96-26}}{=}(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\textbf{96-26}}{=}(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x\cdot y)).$$

...

Beweis **133-2** `b)`

...

`2.2:` $$x\cdot(\mathsf{i}\cdot y)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}((\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot y)-(\mathsf{Im}x)\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot y)+\mathsf{Im}x\cdot\mathsf{Re}(\mathsf{i}\cdot y))$$

$$\stackrel{\mathbf{133-1}}{=}((\mathsf{Re}x)\cdot(-\mathsf{Im}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{Im}(\mathsf{i}\cdot y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(-\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{133-1}}{=}((\mathsf{Re}x)\cdot(-\mathsf{Im}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(-\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}(-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(-\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}(-(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}(-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$

$$=(-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x\cdot y)).$$

`3:` Aus `2.1`“$(\mathsf{i}\cdot x)\cdot y=\ldots=(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x\cdot y))$”,
aus `2.2`“$x\cdot(\mathsf{i}\cdot y)=\ldots=(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x\cdot y))$” und
aus `1`“$\mathsf{i}\cdot(x\cdot y)=(-\mathsf{Im}(x\cdot y))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(x\cdot y))$”
folgt: $$(\mathsf{i}\cdot x)\cdot y=x\cdot(\mathsf{i}\cdot y)=\mathsf{i}\cdot(x\cdot y).$$

<u>Beweis</u> **133-2** `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$$(\mathsf{i} \cdot x) \cdot \mathsf{rez}(y) = x \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{rez}(y)) = \mathsf{i} \cdot (x \cdot \mathsf{rez}(y)).$$

`2.1:` Aus `1`
folgt: $$(\mathsf{i} \cdot x) \cdot \mathsf{rez}(y) = x \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{rez}(y)).$$

`2.2:` Aus `1`
folgt: $$(\mathsf{i} \cdot x) \cdot \mathsf{rez}(y) = \mathsf{i} \cdot (x \cdot \mathsf{rez}(y)).$$

`3.1:`
$$\begin{aligned}&(\mathsf{i} \cdot x) : y\\ &= (\mathsf{i} \cdot x) \cdot \mathsf{rez}(y)\\ &\stackrel{2.1}{=} x \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{rez}(y))\\ &= x \cdot (\mathsf{i} : y).\end{aligned}$$

`3.2:`
$$\begin{aligned}&(\mathsf{i} \cdot x) : y\\ &= (\mathsf{i} \cdot x) \cdot \mathsf{rez}(y)\\ &\stackrel{2.2}{=} \mathsf{i} \cdot (x \cdot \mathsf{rez}(y))\\ &= \mathsf{i} \cdot (x : y).\end{aligned}$$

`4.1:` Aus `3.1`
folgt: $$(\mathsf{i} \cdot x) : y = x \cdot (\mathsf{i} : y).$$

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $$(\mathsf{i} \cdot x) : y = \mathsf{i} \cdot (x : y).$$

`5:` Aus `4.1`“$(\mathsf{i} \cdot x) : y = x \cdot (\mathsf{i} : y)$” und
aus `4.2`“$(\mathsf{i} \cdot x) : y = \mathsf{i} \cdot (x : y)$”
folgt: $$(\mathsf{i} \cdot x) : y = x \cdot (\mathsf{i} : y) = \mathsf{i} \cdot (x : y).$$

`d)`

`1:` $$(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot y) \stackrel{b)}{=} \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{i} \cdot y)) \stackrel{b)}{=} \mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot (x \cdot y)) \stackrel{a)}{=} -x \cdot y.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot y) = -x \cdot y.$$

□

133-3. Nun werden Aussagen über $\mathsf{i} \cdot x = y$ und $-\mathsf{i} \cdot x = y$ getroffen. Dass in `bd)` nicht ohne Weiteres auf die Voraussetzung "y Zahl" verzichtet werden kann, wird in **133-4,5,6** thematisiert:

<u>**133-3(Satz)**</u>

`a)` *Aus "$\mathsf{i} \cdot x = y$" folgt "$-x = \mathsf{i} \cdot y$".*

`b)` *Aus "$\mathsf{i} \cdot x = y$ Zahl" folgt "$x = -\mathsf{i} \cdot y$".*

`c)` *Aus "$-\mathsf{i} \cdot x = y$" folgt "$-(-x) = \mathsf{i} \cdot y$".*

`d)` *Aus "$-\mathsf{i} \cdot x = y$ Zahl" folgt "$x = \mathsf{i} \cdot y$".*

<u>Beweis **133-3**</u> `a)` `VS` gleich $\mathsf{i} \cdot x = y$.

`1:` $-x \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} \mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \mathsf{i} \cdot y$.

`2:` Aus `1`
folgt: $-x = \mathsf{i} \cdot y$.

`b)` `VS` gleich $\mathsf{i} \cdot x = y$ Zahl.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{i} \cdot x = y \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-x = \mathsf{i} \cdot y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{i} \cdot x = y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt: $\mathsf{i} \cdot x$ Zahl.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{i} \cdot x$ Zahl"
folgt via **96-15**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` $x \stackrel{3}{=} -(-x) \stackrel{1.1}{=} -(\mathsf{i} \cdot y) = -\mathsf{i} \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x = -\mathsf{i} \cdot y$.

<u>Beweis</u> **133-3** `c)` `VS` gleich $-\mathsf{i}\cdot x = y.$

`1:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $\mathsf{i}\cdot(-x) = -\mathsf{i}\cdot x.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{i}\cdot(-x) = -\mathsf{i}\cdot x$" und
aus `VS` gleich "$-\mathsf{i}\cdot x = y$"
folgt: $\mathsf{i}\cdot(-x) = y.$

`3:` Aus `2`"$\mathsf{i}\cdot(-x) = y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-(-x) = \mathsf{i}\cdot y.$

`d)` `VS` gleich $-\mathsf{i}\cdot x = y$ Zahl.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-\mathsf{i}\cdot x = y\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-(-x) = \mathsf{i}\cdot y.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-\mathsf{i}\cdot x = y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt: $\mathsf{i}\cdot x$ Zahl.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{i}\cdot x$ Zahl"
folgt via **96-15**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x.$

`4:` Aus `1.1`"$-(-x) = \mathsf{i}\cdot y$" und
aus `3`"$-(-x) = x$"
folgt: $x = \mathsf{i}\cdot y.$

$\square$

133-4. Die beiden folgenden Beispiele vorwegnehmend wird nun darauf hingewiesen, dass die Voraussetzung "y Zahl" in **133-3**`bd)` nicht ohne Weiteres verzichtbar ist:

133-4.Bemerkung

- Die Aussage
  "$(\mathsf{i} \cdot x = y) \Rightarrow (x = -\mathsf{i} \cdot y)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(-\mathsf{i} \cdot x = y) \Rightarrow (x = \mathsf{i} \cdot y)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

133-5. Es wird ein Beispiel mit $\mathsf{i} \cdot x = y$ aber $x \neq -\mathsf{i} \cdot y$ gegeben:

133-5.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

$\rightarrow$) $y = \mathcal{U}$.

Dann folgt:

`a)` $\mathsf{i} \cdot x = \mathcal{U}$.

`b)` $-\mathsf{i} \cdot y = \mathcal{U}$.

`c)` $\mathsf{i} \cdot x = y$.

`d)` $x \neq -\mathsf{i} \cdot y$.

Ad `d)`: Via **6-12** gilt $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

133-6. Es wird ein Beispiel mit $-\mathsf{i}\cdot x = y$ aber $x \neq \mathsf{i}\cdot y$ gegeben:

<u>133-6.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = \mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

$\rightarrow$) $y = \mathcal{U}$.

Dann folgt:

a) $-\mathsf{i}\cdot x = \mathcal{U}$.

b) $\mathsf{i}\cdot y = \mathcal{U}$.

c) $-\mathsf{i}\cdot x = y$.

d) $x \neq \mathsf{i}\cdot y$.

Ad d): Via **6-12** gilt $\mathcal{U}\times\mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

133-7. Nun wird **133-3**`b)` auf einige Parameter angewendet:

133-7(Satz)

`a)` *Aus* “$\mathsf{i}\cdot x = 0$” *folgt* “$x = 0$”.

`b)` *Aus* “$\mathsf{i}\cdot x = 1$” *folgt* “$x = -\mathsf{i}$”.

`c)` *Aus* “$\mathsf{i}\cdot x = \mathsf{nan}$” *folgt* “$x = \mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}$”.

`d)` *Aus* “$\mathsf{i}\cdot x = +\infty$” *folgt* “$x = \mathsf{i}\cdot(-\infty)$”.

`e)` *Aus* “$\mathsf{i}\cdot x = -\infty$” *folgt* “$x = \mathsf{i}\cdot(+\infty)$”.

`f)` *Aus* “$\mathsf{i}\cdot x = \mathsf{i}$” *folgt* “$x = 1$”.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **133-7** `a)` `VS` gleich $\mathsf{i}\cdot x = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{i}\cdot x = 0$” und
aus **95-5**“0 Zahl”
folgt via **133-3**: $x = -\mathsf{i}\cdot 0.$

`2:` $x \stackrel{1}{=} -\mathsf{i}\cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-18}}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$

`3:` Aus 2
folgt: $x = 0.$

`b)` `VS` gleich $\mathsf{i}\cdot x = 1.$

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{i}\cdot x = 1$” und
aus **95-5**“1 Zahl”
folgt via **133-3**: $x = -\mathsf{i}\cdot 1.$

`2:` $x \stackrel{1}{=} -\mathsf{i}\cdot 1 \stackrel{\mathbf{114-11}}{=} -\mathsf{i}.$

`3:` Aus 2
folgt: $x = -\mathsf{i}.$

<u>Beweis **133-7**</u> `c)` `VS` gleich $$\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{nan}.$$

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{nan}$” und
aus **95-5**“nan Zahl”
folgt via **133-3**: $$x=-\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$$

`2:` $$x\stackrel{1}{=}-\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=}\mathsf{i}\cdot(-\mathsf{nan})\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$$

`3:` Aus 2
folgt: $$x=\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$$

`d)` `VS` gleich $$\mathsf{i}\cdot x=+\infty.$$

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{i}\cdot x=+\infty$” und
aus **95-5**“$+\infty$ Zahl”
folgt via **133-3**: $$x=-\mathsf{i}\cdot(+\infty).$$

`2:` $$x\stackrel{1}{=}-\mathsf{i}\cdot(+\infty)\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=}\mathsf{i}\cdot(-(+\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{i}\cdot(-\infty).$$

`3:` Aus 2
folgt: $$x=\mathsf{i}\cdot(-\infty).$$

`e)` `VS` gleich $$\mathsf{i}\cdot x=-\infty.$$

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{i}\cdot x=-\infty$” und
aus **95-5**“$-\infty$ Zahl”
folgt via **133-3**: $$x=-\mathsf{i}\cdot(-\infty).$$

`2:` $$x\stackrel{1}{=}-\mathsf{i}\cdot(-\infty)\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=}\mathsf{i}\cdot(-(-\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{i}\cdot(+\infty).$$

`3:` Aus 2
folgt: $$x=\mathsf{i}\cdot(+\infty).$$

`f)` `VS` gleich $$\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{i}.$$

`1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{i}$” und
aus **95-5**“i Zahl”
folgt via **133-3**: $$x=-\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}.$$

`2:` $$x\stackrel{1}{=}-\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}\stackrel{\mathbf{98-19}}{=}-(-1)\stackrel{\mathbf{100-2}}{=}1.$$

`3:` Aus 2
folgt: $$x=1.$$

□

133-8. Nun wird **133-3**`d)` auf einige Parameter angewendet:

<u>133-8(Satz)</u>

`a)` *Aus* "$-\mathsf{i} \cdot x = 0$" *folgt* "$x = 0$".

`b)` *Aus* "$-\mathsf{i} \cdot x = 1$" *folgt* "$x = \mathsf{i}$".

`c)` *Aus* "$-\mathsf{i} \cdot x = \mathsf{nan}$" *folgt* "$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$".

`d)` *Aus* "$-\mathsf{i} \cdot x = +\infty$" *folgt* "$x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$".

`e)` *Aus* "$-\mathsf{i} \cdot x = -\infty$" *folgt* "$x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$".

`f)` *Aus* "$-\mathsf{i} \cdot x = \mathsf{i}$" *folgt* "$x = -1$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **133-8**</u> `a)` `VS` gleich $-\mathsf{i} \cdot x = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\mathsf{i} \cdot x = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt via **133-3**: $x = \mathsf{i} \cdot 0$.

`2:` $x \stackrel{1}{=} \mathsf{i} \cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-18}}{=} 0$.

`3:` Aus 2
folgt: $x = 0$.

`b)` `VS` gleich $-\mathsf{i} \cdot x = 1$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\mathsf{i} \cdot x = 1$" und
aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **133-3**: $x = \mathsf{i} \cdot 1$.

`2:` $x \stackrel{1}{=} \mathsf{i} \cdot 1 \stackrel{\mathbf{114-11}}{=} \mathsf{i}$.

`3:` Aus 2
folgt: $x = \mathsf{i}$.

<u>Beweis **133-8**</u> `c)` `VS` gleich $\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{nan}.$

Aus `VS` gleich “$-\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{nan}$” und
aus **95-5**“nan Zahl”
folgt via **133-3**: $x=\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$

`d)` `VS` gleich $-\mathsf{i}\cdot x=+\infty.$

Aus `VS` gleich “$-\mathsf{i}\cdot x=+\infty$” und
aus **95-5**“$+\infty$ Zahl”
folgt via **133-3**: $x=\mathsf{i}\cdot(+\infty).$

`e)` `VS` gleich $-\mathsf{i}\cdot x=-\infty.$

Aus `VS` gleich “$-\mathsf{i}\cdot x=-\infty$” und
aus **95-5**“$-\infty$ Zahl”
folgt via **133-3**: $x=\mathsf{i}\cdot(-\infty).$

`f)` `VS` gleich $-\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{i}.$

`1:` Aus `VS` gleich “$-\mathsf{i}\cdot x=\mathsf{i}$” und
aus **95-5**“i Zahl”
folgt via **133-3**: $x=\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}.$

`2:` $x \stackrel{1}{=} \mathsf{i}\cdot\mathsf{i} \stackrel{\mathbf{98-19}}{=} -1.$

`3:` Aus 2
folgt: $x=-1.$

□

133-9. Es gilt $1 : (\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{i} : x$:

133-9(Satz)

$$1 : (\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{i} : x.$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **133-9**

REIM-**Notation**.

1.1: $1 : (\mathsf{i} \cdot x)$

$\overset{\mathbf{123-9}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) : \mathsf{ab2}(\mathsf{i} \cdot x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x)) : \mathsf{ab2}(\mathsf{i} \cdot x))$

$\overset{\mathbf{133-1}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(\mathsf{i} \cdot x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x)) : \mathsf{ab2}(\mathsf{i} \cdot x))$

$\overset{\mathbf{133-1}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(\mathsf{i} \cdot x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(\mathsf{i} \cdot x))$

$\overset{\mathbf{133-1}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)).$

1.2: $-\mathsf{i} : x$

$= -\mathsf{i} \cdot \mathsf{rez}(x)$

$\overset{\mathbf{123-6}}{=} -\mathsf{i} \cdot (1 : x)$

$= -(\mathsf{i} \cdot (1 : x))$

$\overset{\mathbf{133-1}}{=} -(-\mathsf{Im}(1 : x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Re}(1 : x))$

$\overset{\mathbf{FS-+}}{=} \mathsf{Im}(1 : x) - \mathsf{i} \cdot \mathsf{Re}(1 : x)$

$\overset{\mathbf{110-8}}{=} \mathsf{Im}(1 : x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Re}(1 : x))$

$\overset{\mathbf{123-9}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Re}(1 : x))$

$\overset{\mathbf{123-9}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x))$

$= (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))$

$\overset{\mathbf{FS-\cdot}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))$

$= (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)).$

2: Aus 1.1 "$1 : (\mathsf{i} \cdot x) = \ldots = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x))$" und aus 1.2 "$-\mathsf{i} : x = \ldots = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x))$" folgt: $1 : (\mathsf{i} \cdot x) = -\mathsf{i} : x.$

□

133-10. Ergänzend zu **DG$\mathbb{R}$** und **DG$\mathbb{C}$** wird nun fest gestellt, dass weitere, spezielle DistributivGesetze im Umgang mit i gelten:

133-10(Satz) (DGi: DistributivGesetze i)

a) $\mathsf{i} \cdot (x + y) = \mathsf{i} \cdot x + \mathsf{i} \cdot y$.

b) *Aus "$a \in \mathbb{T}$" und "$b \in \mathbb{T}$" folgt "$x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b)$".*

c) $x \cdot y = x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))$.

d) $x \cdot y = (\mathsf{Re}x) \cdot y + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot y)$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **133-10** a)

Aus **101-5**"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$"
folgt via **DG$\mathbb{C}$**: $\mathsf{i} \cdot (x + y) = \mathsf{i} \cdot x + \mathsf{i} \cdot y$.

Beweis **133-10** `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-29**: $a + \mathsf{i} \cdot b$ Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}a = 0$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}b = 0$.

`2.1:` Aus `1.4`"$\mathsf{Im}a = 0$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{Re}(a \cdot x) = a \cdot (\mathsf{Re}x)$.

`2.2:` Aus `1.4`"$\mathsf{Im}a = 0$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{Im}(a \cdot x) = a \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.3:` Aus `1.5`"$\mathsf{Im}b = 0$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{Re}(b \cdot x) = b \cdot (\mathsf{Re}x)$.

`2.4:` Aus `1.5`"$\mathsf{Im}b = 0$"
folgt via **130-3**: $\mathsf{Im}(b \cdot x) = b \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

...

<u>Beweis **133-10**</u> `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` x Zahl.

`4:` Aus `2.1.Fall`“x Zahl” und
aus `1.1`“$a + \mathsf{i} \cdot b$ Zahl”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)$ Zahl.

`5.1:`

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)) \\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \\
&\stackrel{1.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot a - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \\
&\stackrel{1.3}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot a - (\mathsf{Im}x) \cdot b \\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} a \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot b \\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} a \cdot (\mathsf{Re}x) - b \cdot (\mathsf{Im}x) \\
&\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(a \cdot x) - b \cdot (\mathsf{Im}x) \\
&\stackrel{2.4}{=} \mathsf{Re}(a \cdot x) - \mathsf{Im}(b \cdot x) \\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot a) - \mathsf{Im}(b \cdot x) \\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot a) - \mathsf{Im}(x \cdot b) \\
&= \mathsf{Re}(x \cdot a) + (-\mathsf{Im}(x \cdot b)) \\
&\stackrel{\mathbf{133-1}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot a) + \mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot (x \cdot b)) \\
&\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b)).
\end{aligned}
$$

...

...

Beweis **133-10** `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.1.Fall` x Zahl.

...

`5.2:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b))\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b)\\
&\stackrel{1.3}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot b + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b)\\
&\stackrel{1.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot b + (\mathsf{Im}x) \cdot a\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} b \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot a\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} b \cdot (\mathsf{Re}x) + a \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\stackrel{2.3}{=} \mathsf{Re}(b \cdot x) + a \cdot (\mathsf{Im}x)\\
&\stackrel{2.4}{=} \mathsf{Re}(b \cdot x) + \mathsf{Im}(a \cdot x)\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot b) + \mathsf{Im}(a \cdot x)\\
&\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot b) + \mathsf{Im}(x \cdot a)\\
&\stackrel{\mathbf{133-1}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot (x \cdot b)) + \mathsf{Im}(x \cdot a)\\
&\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot (x \cdot b) + x \cdot a)\\
&\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \mathsf{Im}(x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b)).
\end{aligned}$$

`6:` Aus `4`“$x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)$ Zahl”,
aus `5.1`“$\mathsf{Re}(x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)) = \ldots = \mathsf{Re}(x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b))$” und
aus `5.2`“$\mathsf{Im}(x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)) = \ldots = \mathsf{Im}(x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b))$”
folgt via **96-30**: $x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b)$.

...

<u>Beweis **133-10**</u> `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot a = \mathcal{U}$.

`5:` $x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b) \stackrel{4.2}{=} x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b).$$

Beweis **133-10** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` y Zahl.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“y Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“y Zahl”
folgt via **96-24**: $y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`3:` Aus `2.1`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) = x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`4:`
$$x \cdot y \stackrel{2.2}{=} x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{3}{=} x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$x \cdot y \stackrel{2.2}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} x \cdot \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{2.1}{=} x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$x \cdot y = x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))$”

`2:` Aus `A1`
folgt: $x \cdot y = x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))$.

Beweis **133-10** `d)`

`1:`

$$x \cdot y$$

$$\stackrel{\textbf{KGM}}{=} y \cdot x$$

$$\stackrel{\text{c)}}{=} y \cdot (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (y \cdot (\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\textbf{KGM}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot y + \mathsf{i} \cdot (y \cdot (\mathsf{Im}x))$$

$$\stackrel{\textbf{KGM}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot y + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot y).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$x \cdot y = (\mathsf{Re}x) \cdot y + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot y).$$

□

133-11. Das nunmehrige Resultat bereitet den Beweis von **133-12** vor:

133-11(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$".

b) *Aus* "x *Zahl*" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$".

c) *Aus* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$".

d) $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot \mathsf{nan} = x \cdot \mathsf{nan}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **133-11**

`REIM`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`3:` Aus 2"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`4:`

$$x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} + 0 \cdot y \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 + 0 \cdot y \stackrel{\mathbf{98\text{-}12}}{=} 0 \cdot y \stackrel{3}{=} 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} x \cdot \mathsf{nan}.$$

`5:` Aus 4
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

...

Beweis **133-11** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

`3.1:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq x$” und
aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3.2`“$x \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`5:`
$$x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + x \cdot y \stackrel{4}{=} \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} x \cdot \mathsf{nan}.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

<u>Beweis **133-11**</u> `b)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl…"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`2.1:` Aus `1` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan} + (\mathsf{Re}x) \cdot y = (\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan}.$$

`2.2:` Aus `1` "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan} + (\mathsf{Im}x) \cdot y = (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan}.$$

`3:`

$$\begin{aligned}
& x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y \\
\stackrel{\mathbf{DG}\mathsf{i}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan})) + x \cdot y \\
\stackrel{\mathbf{DG}\mathsf{i}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan})) + ((\mathsf{Re}x) \cdot y + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot y)) \\
\stackrel{\mathbf{103-6}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan} + (\mathsf{Re}x) \cdot y) + (\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan}) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot y)) \\
\stackrel{\mathbf{DG}\mathsf{i}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan} + (\mathsf{Re}x) \cdot y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan} + (\mathsf{Im}x) \cdot y) \\
\stackrel{2.1}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan}) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan} + (\mathsf{Im}x) \cdot y) \\
\stackrel{2.2}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan}) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan}) \\
\stackrel{\mathbf{DG}\mathsf{i}}{=}\ & x \cdot \mathsf{nan}.
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

Beweis **133-11** `c)` `VS` gleich $y \in \mathbb{T}$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`“x Zahl” und
aus `VS` gleich “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathcal{U}$.

`3:` $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y \stackrel{2}{=} \mathcal{U} + x \cdot y \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2}{=} x \cdot \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

`d)`

Aus **95-12**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot \mathsf{nan} = x \cdot \mathsf{nan}$.

□

133-12. Mit diesem Satz liegt ein spezialisiertes DistributivGesetz vor:

133-12(Satz)

a) *Aus* "$y \in \mathbb{T}$" *und* "$z \in \mathbb{T}$"
folgt "$x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) = x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z)$".

b) $x \cdot \mathsf{ab2}(y) = x \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))$.

c) $\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$
$= (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)))$
$+(((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)))$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **133-12** a) `VS` gleich $(y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

1.1: Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

1.2: Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(z \in \mathbb{S}) \vee (z = \mathsf{nan})$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:
$$(y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan})$$
$$\vee \quad (y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan}).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

3.1: Aus 2.1.Fall "$y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **127-8**: $0 \le y \cdot y$.

3.2: Aus 2.2.Fall "$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \le z \cdot z$.

4: Aus 3.1 "$0 \le y \cdot y$" und
aus 3.2 "$0 \le z \cdot z$"
folgt via **DGVZ**: $x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) = x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z)$.

...

Beweis **133-12** `a)` `VS` gleich $(y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot y \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $z = \mathsf{nan}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$y \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $y \cdot y + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$y \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **133-11**: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot (y \cdot y) = x \cdot \mathsf{nan}$.

`5:`

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) \\
\stackrel{3.2}{=}\ & x \cdot (y \cdot y + \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \\
\stackrel{\mathbf{97-5}}{=}\ & x \cdot (y \cdot y + \mathsf{nan}) \\
\stackrel{4.1}{=}\ & x \cdot \mathsf{nan} \\
\stackrel{4.2}{=}\ & x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot (y \cdot y) \\
\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}\ & x \cdot (y \cdot y) + x \cdot \mathsf{nan} \\
\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\ & x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \\
\stackrel{3.2}{=}\ & x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z).
\end{aligned}
$$

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) = x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z)$.

...

<u>Beweis **133-12**</u> `a)` `VS` gleich $(y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $z \cdot z \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `3.2`"$z \cdot z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + z \cdot z = \mathsf{nan}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$z \cdot z \in \mathbb{T}$"
folgt via **133-11**: $x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot (z \cdot z) = x \cdot \mathsf{nan}$.

`5:`

$$x \cdot (y \cdot y + z \cdot z)$$

$$\stackrel{3.1}{=} x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} + z \cdot z)$$

$$\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} x \cdot (\mathsf{nan} + z \cdot z)$$

$$\stackrel{4.1}{=} x \cdot \mathsf{nan}$$

$$\stackrel{4.2}{=} x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot (z \cdot z)$$

$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) + x \cdot (z \cdot z)$$

$$\stackrel{3.1}{=} x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z).$$

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) = x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z)$.

...

Beweis **133-12** `a)` `VS` gleich $(y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan})$

`3.1:` Aus `2.4.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall` folgt: $z = \mathsf{nan}$.

`4:`

$$\begin{aligned} & x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) \\ \stackrel{3.1}{=} & x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} + z \cdot z) \\ \stackrel{3.2}{=} & x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \\ \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} & x \cdot (\mathsf{nan} + \mathsf{nan}) \\ \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} & x \cdot \mathsf{nan} \\ \stackrel{\mathbf{133-11}}{=} & x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot \mathsf{nan} \\ \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} & x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) + x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \\ \stackrel{3.1}{=} & x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \\ \stackrel{3.2}{=} & x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z). \end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) = x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$x \cdot (y \cdot y + z \cdot z) = x \cdot (y \cdot y) + x \cdot (z \cdot z).$$

Beweis **133-12** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` y Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall` "y Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`3:` Aus 2 "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus 2 "$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$x\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y)) = x\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))+x\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))$.

`4:`
$$x \cdot \mathsf{ab2}(y) \stackrel{\mathbf{96-22}}{=} x \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{3}{=} x \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`5:` Aus 4
folgt: $x \cdot \mathsf{ab2}(y) = x \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `1.2.Fall` "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(y) = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `1.2.Fall` "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`4:`
$$x \cdot \mathsf{ab2}(y) \stackrel{3.1}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} x \cdot \mathcal{U} + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} x \cdot (\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}) + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`5:` Aus 4
folgt: $x \cdot \mathsf{ab2}(y) = x \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$x \cdot \mathsf{ab2}(y) = x \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}y)) + x \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

Beweis **133-12** `c)`

`1:`
$$\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$$
$$\overset{\mathtt{b)}}{=} \mathsf{ab2}(x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)) + \mathsf{ab2}(x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot\mathsf{ab2}(x) + \mathsf{ab2}(x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot\mathsf{ab2}(x) + ((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot\mathsf{ab2}(x)$$
$$\overset{\mathtt{b)}}{=} (((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)) + ((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))) \\ +((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot\mathsf{ab2}(x)$$
$$\overset{\mathtt{b)}}{=} (((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)) + ((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))) \\ +(((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)) + ((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)))$$
$$\overset{\mathbf{103\text{–}6}}{=} (((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)) + ((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))) \\ +(((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)))$$
$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))) \\ +(((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)))$$
$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ +(((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)))$$
$$\overset{\mathbf{FSA}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ +(((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x)) + ((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)))$$
$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ +(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x)))$$
$$\overset{\mathbf{KGM}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ +(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$\mathsf{ab2}(x)\cdot\mathsf{ab2}(y)$$
$$= (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ +(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}x))\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}x))\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}y))).$$

□

Einiges über $\mathsf{i} \cdot x$ mit $x \in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{S}$ oder $\in \mathbb{T}$.
Berechnung von $x \cdot y$, wenn jeweils ein Real- oder ImaginärTeil$= 0$ ist.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 25/02/12**

134-1. Falls $x \in \mathbb{R}$, dann $\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}$ und $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$ und $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x$. Ähnliches gilt für $x \in \mathbb{S}$ oder $x \in \mathbb{T}$. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - b) - a)`:

<u>**134-1(Satz)**</u>

`a)` *Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}$" und "$\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$" und "$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x$".*

`b)` *Aus "$x \in \mathbb{S}$" folgt "$\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{B}$" und "$\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$" und "$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x$".*

`c)` *Aus "$x \in \mathbb{T}$" folgt "$\mathsf{i} \cdot x$ Zahl" und "$\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0$" und "$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x$".*

<u>`REIM.RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **134-1**</u> `c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

`2.1:` Aus **95-5**"i Zahl" und
aus `1.1`"x Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{i} \cdot x$ Zahl.

`2.2:` $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} -\mathsf{Im}x \stackrel{1.3}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$

`2.3:` $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} \mathsf{Re}x \stackrel{1.2}{=} x.$

`3:` Aus `2.1`"$\mathsf{i} \cdot x$ Zahl",
aus `2.2`"$\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = \ldots = 0$" und
aus `2.3`"$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = \ldots = x$"
folgt: $(\mathsf{i} \cdot x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x).$

<u>Beweis **134-1**</u> `b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$" und
aus **101-5**"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot \mathsf{i} \in \mathbb{B}$.

`2.1:` Via **KGM** gilt: $\mathsf{i} \cdot x = x \cdot \mathsf{i}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x)$.

`3:` Aus `2.1`"$\mathsf{i} \cdot x = x \cdot \mathsf{i}$" und
aus `1.2`"$x \cdot \mathsf{i} \in \mathbb{B}$"
folgt: $\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{B}$" und
aus `2.2`"$(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x)$"
folgt: $(\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x)$.

`a)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus **101-5**"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x)$.

`3:` Aus `1.2`"$\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}$" und
aus `2`"$(\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x)$"
folgt: $(\mathsf{i} \cdot x \in \mathbb{C}) \wedge (\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot x) = x)$.

$\square$

134-2. Im Fall $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y = 0$ ermittelt sich $x \cdot y$ etwas einfacher als in **96-28**. Ähnliches gilt, wenn jeweils Real- oder ImaginärTeil von x, y gleich Null sind:

134-2(Satz)

a) *Aus* “$\mathsf{Re}x = 0$” *und* “$\mathsf{Re}y = 0$” *folgt* “$x \cdot y = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$”.

b) *Aus* “$\mathsf{Re}x = 0$” *und* “$\mathsf{Im}y = 0$” *folgt* “$x \cdot y = \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$”.

c) *Aus* “$\mathsf{Im}x = 0$” *und* “$\mathsf{Re}y = 0$” *folgt* “$x \cdot y = \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y))$”.

d) *Aus* “$\mathsf{Im}x = 0$” *und* “$\mathsf{Im}y = 0$” *folgt* “$x \cdot y = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x)$”.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **134-2**</u> `a)` `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **130-2**: $x \cdot y = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$”
folgt via **127-4**: x Zahl.

`1.3:` Aus `VS` folgt: $\mathsf{Re}y = 0$.

`2:` Aus `1.2`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Im}x$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}x) \cdot 0 = 0$.

`4:`
$$\begin{aligned} & x \cdot y \\ \stackrel{1.1}{=} & -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \\ \stackrel{1.3}{=} & -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot 0) \\ \stackrel{3}{=} & -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot 0 \\ \stackrel{\mathbf{98-18}}{=} & -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \\ \stackrel{\mathbf{98-12}}{=} & -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y). \end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot y = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

<u>Beweis **134-2**</u> `b)` `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0\ldots$"
folgt via **130-2**: $x \cdot y = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0\ldots$"
folgt via **127-4**: x Zahl.

`1.3:` Aus `VS` folgt: $\mathsf{Im}y = 0$.

`2:` Aus `1.2`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}x) \cdot 0 = 0$.

`4:`

$$\begin{aligned} & x \cdot y \\ \stackrel{1.1}{=}\ & -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \\ \stackrel{1.3}{=}\ & -(\mathsf{Im}x) \cdot 0 + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \\ \stackrel{3}{=}\ & -0 + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \\ \stackrel{\mathbf{98-15}}{=}\ & 0 + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \\ \stackrel{\mathbf{98-12}}{=}\ & \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)). \end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot y = \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$.

<u>Beweis **134-2**</u> `c)` `VS` gleich $(\mathsf{Im}x = 0) \wedge (\mathsf{Re}y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0\ldots$"
folgt via **130-3**: $x \cdot y = x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0\ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0\ldots$"
folgt via **127-4**: x Zahl.

`1.4:` Aus `VS` folgt: $\mathsf{Re}y = 0$.

`2:` Aus `1.3`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`3:`
$$x \cdot y \overset{1.1}{=} x \cdot (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \overset{1.4}{=} x \cdot 0 + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \overset{2}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \overset{\mathbf{98-12}}{=} \mathsf{i} \cdot (x \cdot (\mathsf{Im}y)) \overset{1.2}{=} \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot y = \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`d)` `VS` gleich $(\mathsf{Im}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}x = 0\ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathsf{Im}y = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

`2:` $x \cdot y \overset{1.1}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot y \overset{1.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x \cdot y = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

$\square$

Einiges über $x \cdot x$.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 25/02/12**

135-1. $x \cdot x$ ist genau dann eine Zahl, wenn x eine Zahl ist:

135-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot x$ *Zahl.*

`ii)` x *Zahl.*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **135-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$x \cdot x$ Zahl"
folgt via **96-15**: x Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x Zahl.

Aus `VS` gleich "x Zahl" und
aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot x$ Zahl.

□

135-2. Aus $x \cdot x \in \mathbb{B}$ folgt $x \in \mathbb{B}$. Dass hier in der Tat keine Äquivalenz vorliegt, wird in **135-3,4** thematisiert:

<u>**135-2(Satz)**</u>

Aus “$x \cdot x \in \mathbb{B}$” folgt “$x \in \mathbb{B}$”.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **135-2**</u> `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{B}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \cdot x \in \mathbb{B}$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot x$ Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \cdot x \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $\mathsf{Im}(x \cdot x) \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`“$x \cdot x$ Zahl”
folgt via **135-1**: x Zahl.

`2.2:` Via **96-26** gilt: $\mathsf{Re}(x \cdot x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3.1:` Aus `2.1`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2.1`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`3.3:` Aus `1.2`“$\mathsf{Re}(x \cdot x) \in \mathbb{S}$” und
aus `2.2`“$\mathsf{Re}(x \cdot x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus `3.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$.

`4.2:` Aus “$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$” und
aus `3.3`“$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \in \mathbb{S}$.

...

<u>Beweis **135-2**</u> `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{B}$.

...

`5:` Aus `4.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \in \mathbb{S}$" und
aus `4.1`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-4**: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}) \wedge (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S})$.

`6.1:` Aus `5`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **127-5**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{B}$.

`6.2:` Aus `5`"$\ldots - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-14**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`7.2:` Aus `6.2`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-5**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{B}$.

`8:` Aus `7.2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-14**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`9:` Aus `7.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$" und
aus `8`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $x \in \mathbb{B}$.

$\square$

135-3. Wie an Hand folgenden Beispiels klar wird, folgt aus $x \in \mathbb{B}$ nicht ohne Weiteres $x \cdot x \in \mathbb{B}$:

135-3.Bemerkung

Die Aussage
“$(x \in \mathbb{B}) \Rightarrow (x \cdot x \in \mathbb{B})$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

135-4. Im nunmehrigen Beispiel wird klar gemacht, dass aus $x \in \mathbb{B}$ nicht notwendiger Weise $x \cdot x \in \mathbb{B}$ folgt:

<u>135-4.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{B}$.

b) $x \cdot x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

c) $x \cdot x \notin \mathbb{B}$.

135-5. Es gilt $x \cdot x \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{C}$:

135-5(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $x \cdot x \in \mathbb{C}$.

ii) $x \in \mathbb{C}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **135-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x \in \mathbb{C}$.

1: Aus `VS` gleich "$x \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt via **132-3**: $$(x = 0) \wedge (x \text{ Zahl}) \vee (x \text{ Zahl}) \wedge (x = 0) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C}) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C}).$$

2: Aus 1
folgt: $$(x = 0) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

Aus `1.1.Fall` "$x = 0$" und
aus **101-5** "$0 \in \mathbb{C}$"
folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`1.2.Fall` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

Aus `1.2.Fall`
folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{C}$.

□

135-6. Mit dem vorliegenden Satz wird **135-7,8,9** vorbereitet:

135-6(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$x \cdot x = \mathsf{nan}$" *folgt* "$x = \mathsf{nan}$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$x \cdot x = +\infty$" *folgt* "$(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot x \neq -\infty$".

`RECH.`-**Notation**

Beweis **135-6** `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot x = \mathsf{nan})$.

`1`: Es gilt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x \neq \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`1.2.Fall` $x \neq \mathsf{nan}$.

`2`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$x \neq \mathsf{nan}$"
folgt via **95-20**: $x \in \mathbb{S}$.

`3`: Aus `2` "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `2` "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

`4`: Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot x = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-21**: $x \cdot x \notin \mathbb{S}$.

`5`: Es gilt `3` "$x \cdot x \in \mathbb{S}$".
Es gilt `4` "$x \cdot x \notin \mathbb{S}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = \mathsf{nan}$.

Beweis **135-6** `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \cdot x = +\infty)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \cdot x = +\infty$"
folgt via **95-18**: $x \cdot x \notin \mathbb{R}$.

`4:` Es gilt 2"$x \cdot x \in \mathbb{R}$".
Es gilt 3"$x \cdot x \notin \mathbb{R}$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` $x \cdot x \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`3:` Aus 2"$x \cdot x = \mathsf{nan}$" und
aus **AAI**"$\mathsf{nan} \neq +\infty$" folgt: $x \cdot x \neq +\infty$.

`4:` Es gilt 3"$x \cdot x \neq +\infty$".
Es gilt`VS` gleich "$\ldots x \cdot x = +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.3.Fall` $x = +\infty$.

Aus `1.3.Fall`
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.4.Fall` $x = -\infty$.

Aus `1.4.Fall`
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

Beweis **135-6** `c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **112-4**: $0 \leq x \cdot x$.

`3:` Aus 2"$0 \leq x \cdot x$"
folgt via **107-17**: $x \cdot x \neq -\infty$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` $x \cdot x \overset{\texttt{1.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`3:` Aus 2"$x \cdot x = \ldots = \mathsf{nan}$" und
aus **AAI**"$\mathsf{nan} \neq -\infty$"
folgt: $x \cdot x \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot x \neq -\infty$.

$\square$

135-7. Mit Hilfe von **135-6** stellt sich $x \cdot x = \mathsf{nan}$ als äquivalent zu $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$ heraus:

135-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot x = \mathsf{nan}$.

`ii)` "$x = \mathsf{nan}$" *oder* "$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **135-7**

`REIM`-**Notation**.

`i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $x \cdot x = \mathsf{nan}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **127-4**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"$x \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt via **127-4**: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$.

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **135-7** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x = \mathsf{nan}.$

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\mathsf{Re}x = 0.$

`4.1:` Aus 2"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}.$

`4.2:` Aus `3.1.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **130-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x.$

`4.3:` Aus `3.1.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0$"
folgt via **127-3**: $x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x).$

`5:` Aus 4"$x \cdot x = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot x = \mathsf{nan}$"
folgt: $-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \mathsf{nan}.$

`6:` Aus 5"$-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **100-13**: $(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \mathsf{nan}.$

`7:` Aus `4.1`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 7"$(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **135-6**: $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}.$

`8:` Aus `4.2`"$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}x$" und
aus 8"$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$"
folgt: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}.$

`9:` Aus 9
folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$

`3.2.Fall` $\mathsf{Im}x = 0.$

`4:` Aus `3.2.Fall`"$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}.$

`5:` Aus 4"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot x = \mathsf{nan}$"
folgt via **135-6**: $x = \mathsf{nan}.$

`6:` Aus 5"$x = \mathsf{nan}$"
folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$

Beweis **135-7** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

1: Nach VS gilt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x = \mathsf{nan}$

2: $x \cdot x \overset{\text{1.1.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

3: Aus 2 folgt: $x \cdot x = \mathsf{nan}$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

2: $x \cdot x \overset{\text{1.2.Fall}}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \overset{\mathbf{133-2}}{=} -\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-5}}{=} -\mathsf{nan} \overset{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

3: Aus 2 folgt: $x \cdot x = \mathsf{nan}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \cdot x = \mathsf{nan}$.

□

135-8. Interessanter Weise gilt $x \cdot x = +\infty$ genau dann, wenn $x = +\infty$ oder $x = -\infty$ - und in jedem Fall ist $x \in \mathbb{T}$:

135-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot x = +\infty$.

`ii)` *"$x = +\infty$" oder "$x = -\infty$".*

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **135-8**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \cdot x = +\infty.$

`1:` Via **107-6** gilt: $0 < +\infty.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x = +\infty$" und
aus `1`"$0 < +\infty$"
folgt: $0 < x \cdot x.$

`3:` Aus `2`"$0 < x \cdot x$"
folgt via **127-10**: $x \in \mathbb{S}.$

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $x \in \mathbb{R}.$

`5:` Aus `4.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$" und
aus `4.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}.$

`6:` Aus `5`"$x \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $x \cdot x \neq +\infty.$

`7:` Es gilt `6`"$x \cdot x \neq +\infty$".
Es gilt `VS` gleich "$x \cdot x = +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

`4.2.Fall` $x = +\infty.$

Aus `4.2.Fall`
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

`4.3.Fall` $x = -\infty.$

Aus `4.3.Fall`
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

<u>Beweis **135-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

1: Nach VS gilt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x = +\infty$.

2: $x \cdot x \stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

3: Aus 2 folgt: $x \cdot x = +\infty$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x = -\infty$.

2: $x \cdot x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

3: Aus 2 folgt: $x \cdot x = +\infty$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \cdot x = +\infty$.

□

135-9. Aus **135-8** folgt - unter anderem via **133-2,7** - das nunmehrige Kriterium:

135-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot x = -\infty$.

`ii)` "$x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$" *oder* "$x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **135-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \cdot x = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot x = -\infty$"
folgt via **100-13**: $-x \cdot x = +\infty$.

`2:` $(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -x \cdot x \stackrel{1}{=} +\infty$.

`3:` Aus 2"$(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot x) = \ldots = +\infty$"
folgt via **135-8**: $(\mathsf{i} \cdot x = +\infty) \vee (\mathsf{i} \cdot x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\mathsf{i} \cdot x = +\infty$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x = +\infty$"
folgt via **133-7**: $x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

`5:` Aus 4
folgt: $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

`3.2.Fall` $\mathsf{i} \cdot x = -\infty$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x = -\infty$"
folgt via **133-7**: $x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

`5:` Aus 4
folgt: $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

Beweis **135-9** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

1: Nach VS gilt: $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

2:
$$x \cdot x \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} (\mathsf{i} \cdot (+\infty)) \cdot (\mathsf{i} \cdot (+\infty)) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty.$$

3: Aus 2 folgt: $x \cdot x = -\infty$.

1.2.Fall $x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

2:
$$x \cdot x \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (\mathsf{i} \cdot (-\infty)) \cdot (\mathsf{i} \cdot (-\infty)) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty.$$

3: Aus 2 folgt: $x \cdot x = -\infty$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \cdot x = -\infty$.

□

FS− :: FundamentalSatz − :.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 25/02/12**

136-1. Das vorliegende Resultat ergibt sich durch Kombination von **123-6** mit **KGM**:

136-1(Satz)

$$x : y = x \cdot (1 : y) = (1 : y) \cdot x.$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **136-1**

`1.1:` $x : y = x \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{\mathbf{123-6}}{=} x \cdot (1 : y).$

`1.2:` $x : y = x \cdot \mathsf{rez}(y) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} \mathsf{rez}(y) \cdot x \stackrel{\mathbf{123-6}}{=} (1 : y) \cdot x.$

`2:` Aus `1.1`“$x : y = \ldots = x \cdot (1 : y)$” und
aus `1.2`“$x : y = \ldots = (1 : y) \cdot x$”
folgt: $x : y = x \cdot (1 : y) = (1 : y) \cdot x.$

□

136-2. Zwei auch an sich interessante Gleichungen bereiten den Beweis von **FS**$-:$ vor:

136-2(Satz)

a) $1 : (-x) = -1 : x$.

b) $-1 : (-x) = 1 : x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **136-2**

REIM-**Notation**.

---

a)

1: $$1:(-x)$$

$$\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}(-x)):\mathsf{ab2}(-x)+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}(-x)):\mathsf{ab2}(-x))$$

$$\stackrel{\mathbf{110-9}}{=} (\mathsf{Re}(-x)):\mathsf{ab2}(x)+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}(-x)):\mathsf{ab2}(x))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x)+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}(-x)):\mathsf{ab2}(x))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x)+\mathsf{i}\cdot((-(-\mathsf{Im}x)):\mathsf{ab2}(x))$$

$$=(-\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))+\mathsf{i}\cdot((-(-\mathsf{Im}x)):\mathsf{ab2}(x))$$

$$=(-\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))+\mathsf{i}\cdot((-(-\mathsf{Im}x))\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-(\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))+\mathsf{i}\cdot((-(-\mathsf{Im}x))\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-(\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))+\mathsf{i}\cdot(-((-\mathsf{Im}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))))$$

$$\stackrel{\mathbf{110-8}}{=} -(\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))-\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -((\mathsf{Re}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))))$$

$$=-((\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x)+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x)\cdot\mathsf{rez}(\mathsf{ab2}(x))))$$

$$=-((\mathsf{Re}x):\mathsf{ab2}(x)+\mathsf{i}\cdot((-\mathsf{Im}x):\mathsf{ab2}(x)))$$

$$\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} -1:x.$$

2: Aus 1 folgt: $$1:(-x)=-1:x.$$

<u>Beweis **136-2**</u> `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $-1 : (-x) = 1 : (-(-x))$.

`3:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `2`“$-1 : (-x) = 1 : (-(-x))$” und
aus `3`“$-(-x) = x$”
folgt: $-1 : (-x) = 1 : x$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $1 : x = \mathcal{U}$.

`3:` $-1 : (-x) \stackrel{2.1}{=} -1 : \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} 1 : x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $-1 : (-x) = 1 : x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-1 : (-x) = 1 : x$.

$\square$

136-3. Der **FundamentalSatz** $-:$ ist das Analogen zum **FS**$-\cdot$ für die Division an Stelle der Multiplikation:

136-3(Satz) (**FS**$-$ :: **FundamentalSatz** $-:$)

a) $(-x) : y = x : (-y) = -x : y$.

b) $(-x) : (-y) = x : y$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **136-3**</u> `a)`

`1.1:` $$(-x) : y$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (-x) \cdot (1 : y)$$

$$\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -(x \cdot (1 : y))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} -(x : y)$$

$$= -x : y.$$

`1.2:` $$x : (-y)$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : (-y))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-2}}{=} x \cdot (-(1 : y))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -(x \cdot (1 : y))$$

$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} -(x : y)$$

$$= -x : y.$$

`2:` Aus `1.1`“$(-x) : y = \ldots = -x : y$” und
aus `1.2`“$x : (-y) = \ldots = -x : y$”
folgt: $$(-x) : y = x : (-y) = -x : y.$$

`b)`

`1:` $$(-x) : (-y)$$

$$\stackrel{\mathbf{a)}}{=} -(x : (-y))$$

$$\stackrel{\mathbf{a)}}{=} -(-(x : y))$$

$$\stackrel{\mathbf{100-4}}{=} x : y.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(-x) : (-y) = x : y.$$

□

136-4. Es gilt $x : (\mathsf{i} \cdot y) = -\mathsf{i} \cdot (x : y) = -(\mathsf{i} \cdot x) : y$ und $x : (-\mathsf{i} \cdot y) = \mathsf{i} \cdot (x : y) = (\mathsf{i} \cdot x) : y$:

136-4(Satz)

a) $x : (\mathsf{i} \cdot y) = -\mathsf{i} \cdot (x : y) = -(\mathsf{i} \cdot x) : y$.

b) $x : (-\mathsf{i} \cdot y) = \mathsf{i} \cdot (x : y) = (\mathsf{i} \cdot x) : y$.

c) $(\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) = (-\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y) = x : y$.

d) $(\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y) = (-\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) = -x : y$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **136-4**</u> a)

1.1: $$x : (\mathsf{i} \cdot y)$$

$$\overset{\textbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : (\mathsf{i} \cdot y))$$

$$\overset{\textbf{133-9}}{=} x \cdot (-\mathsf{i} : y)$$

$$\overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} -x \cdot (\mathsf{i} : y)$$

$$\overset{\textbf{136-1}}{=} -x \cdot (\mathsf{i} \cdot (1 : y))$$

$$\overset{\textbf{133-2}}{=} -\mathsf{i} \cdot (x \cdot (1 : y))$$

$$\overset{\textbf{136-1}}{=} -\mathsf{i} \cdot (x : y).$$

1.2: $$x : (\mathsf{i} \cdot y)$$

$$\overset{\textbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : (\mathsf{i} \cdot y))$$

$$\overset{\textbf{133-9}}{=} x \cdot (-\mathsf{i} : y)$$

$$\overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} -x \cdot (\mathsf{i} : y)$$

$$\overset{\textbf{136-1}}{=} -x \cdot (\mathsf{i} \cdot (1 : y))$$

$$\overset{\textbf{133-2}}{=} -(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (1 : y)$$

$$\overset{\textbf{136-1}}{=} -(\mathsf{i} \cdot x) : y.$$

2: Aus 1.1 “$x : (\mathsf{i} \cdot y) = \ldots = -\mathsf{i} \cdot (x : y)$” und
aus 1.2 “$x : (\mathsf{i} \cdot y) = \ldots = -(\mathsf{i} \cdot x) : y$”
folgt: $$x : (\mathsf{i} \cdot y) = -\mathsf{i} \cdot (x : y) = -(\mathsf{i} \cdot x) : y.$$

b)

1.1: $x : (-\mathsf{i} \cdot y) \overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} x : (\mathsf{i} \cdot (-y)) \overset{\text{a)}}{=} -\mathsf{i} \cdot (x : (-y)) \overset{\textbf{FS}-:}{=} -\mathsf{i} \cdot (-x : y) \overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{i} \cdot (x : y).$

1.2: $x : (-\mathsf{i} \cdot y) \overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} x : (\mathsf{i} \cdot (-y)) \overset{\text{a)}}{=} -(\mathsf{i} \cdot x) : (-y) \overset{\textbf{FS}-:}{=} -(-(\mathsf{i} \cdot x) : y) \overset{\textbf{100-4}}{=} (\mathsf{i} \cdot x) : y.$

2: Aus 1.1 “$x : (-\mathsf{i} \cdot y) = \ldots = \mathsf{i} \cdot (x : y)$” und
aus 1.2 “$x : (-\mathsf{i} \cdot y) = \ldots = (\mathsf{i} \cdot x) : y$”
folgt: $$x : (-\mathsf{i} \cdot y) = \mathsf{i} \cdot (x : y) = (\mathsf{i} \cdot x) : y.$$

Beweis **136-4** `c)`

`1.1:`

$$(\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y)$$

$$\stackrel{\text{a)}}{=} -\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{i} \cdot x) : y)$$

$$\stackrel{\text{b)}}{=} -\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot (x : y))$$

$$= -(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot (x : y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(-x : y)$$

$$\stackrel{\mathbf{100-4}}{=} x : y.$$

`1.2:`

$$(-\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y)$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} (\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y).$$

`2:` Aus `1.1`“$(\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) = \ldots = x : y$” und
aus `1.2`“$(-\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y) = (\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y)$”
folgt: $(\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) = (-\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y) = x : y.$

`d)`

`1.1:` $(\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y) \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} -(\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) \stackrel{\text{c)}}{=} -x : y.$

`1.2:` $(-\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} -(\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) \stackrel{\text{c)}}{=} -x : y.$

`2:` Aus `1.1`“$(\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y) = \ldots = -x : y$” und
aus `1.2`“$(-\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) = \ldots = -x : y$”
folgt: $(\mathsf{i} \cdot x) : (-\mathsf{i} \cdot y) = (-\mathsf{i} \cdot x) : (\mathsf{i} \cdot y) = -x : y.$

□

Einiges über $x\cdot$Parameter.
Einiges über x :Parameter.
Einiges über $1 : x$.
:SZ: :Satz Zahlen.

Ersterstellung: 20/05/10 **Letzte Änderung: 02/03/12**

137-1. Es folgt ein Kriterium für $x \cdot \mathsf{nan} = 0$ und $x : \mathsf{nan} = 0$:

137-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot \mathsf{nan} = 0$.

`ii)` $x : \mathsf{nan} = 0$.

`iii)` $x = 0$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-1**

`REIM`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \cdot \mathsf{nan} = 0$.

`1:` $x : \mathsf{nan} = x \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\texttt{VS}}{=} 0$.

`2:` Aus `1` folgt: $x : \mathsf{nan} = 0$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x : \mathsf{nan} = 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x : \mathsf{nan} = 0$" und aus **95-5**"0 Zahl" folgt: $x : \mathsf{nan}$ Zahl.

`1.2:` $\mathsf{nan} \cdot x \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{nan}) = x : \mathsf{nan} \stackrel{\texttt{VS}}{=} 0$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x : \mathsf{nan}$ Zahl" folgt via **96-17**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{nan} \cdot x = \ldots = 0$" folgt via **96-31**: $(\mathsf{Re}(\mathsf{nan} \cdot x) = 0) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{nan} \cdot x) = 0)$.

`2.3:` Aus **99-15**"$\mathsf{Im}\mathsf{nan} = 0$" folgt via **130-3**:
$(\mathsf{Re}(\mathsf{nan} \cdot x) = \mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Re}x)) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{nan} \cdot x) = \mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

...

<u>Beweis **137-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $x : \mathsf{nan} = 0.$

...

3.1: Aus 2.1 "x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}).$

3.2: Aus 2.2 "$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} \cdot x) = 0 \ldots$" und
aus 2.3 "$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} \cdot x) = \mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Re}x) \ldots$"
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Re}x) = 0.$

3.3: Aus 2.2 "$\ldots \mathsf{Im}(\mathsf{nan} \cdot x) = 0$" und
aus 2.3 "$\ldots \mathsf{Im}(\mathsf{nan} \cdot x) = \mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Im}x)$"
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Im}x) = 0.$

4.1: Aus 3.2 "$\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Re}x) = 0$",
aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus 3.1 "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{nan} = 0) \vee (\mathsf{Re}x = 0).$

4.2: Aus 3.3 "$\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{Im}x) = 0$",
aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus 3.1 "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{nan} = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0).$

5.1: Aus 4.1 "$(\mathsf{nan} = 0) \vee (\mathsf{Re}x = 0)$" und
aus **95-7** "$0 \neq \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Re}x = 0.$

5.2: Aus 4.2 "$(\mathsf{nan} = 0) \vee (\mathsf{Im}x = 0)$" und
aus **95-7** "$0 \neq \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}x = 0.$

6: Aus 5.1 "$\mathsf{Re}x = 0$" und
aus 5.2 "$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **96-31**: $x = 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $x = 0.$

1: $x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} 0.$

2: Aus 1
folgt: $x \cdot \mathsf{nan} = 0.$

□

137-2. Kriterium **137-1** steht bereits zur Verfügung. Nun kann die "Negations-Version" von **137-1** wie eine reife Frucht geerntet werden:

137-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot \mathsf{nan}$.

`ii)` $0 \neq x : \mathsf{nan}$.

`iii)` $0 \neq x$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-2**

`1:` Via **137-1** gilt: $(x \cdot \mathsf{nan} = 0) \Leftrightarrow (x : \mathsf{nan} = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(0 \neq x \cdot \mathsf{nan}) \Leftrightarrow (0 \neq x : \mathsf{nan}) \Leftrightarrow (0 \neq x)$.

□

137-3. Es gilt $x : (+\infty) = 0$ genau dann, wenn x eine Zahl ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $x : (-\infty) = 0$:

137-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : (+\infty) = 0$.

`ii)` $x : (-\infty) = 0$.

`iii)` x *Zahl.*

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **137-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x : (+\infty) = 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x : (+\infty) = 0$” und
aus **95-5**“0 Zahl”
folgt: $x : (+\infty)$ Zahl.

`1.2:` $x : (-\infty) = x \cdot \mathsf{rez}(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot 0.$

`2:` Aus `1.1`“$x : (+\infty)$ Zahl”
folgt via **96-17**: x Zahl.

`3:` Aus `2`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

`4:` Aus `1.2`“$x : (-\infty) = \ldots = x \cdot 0$” und
aus `3`“$x \cdot 0 = 0$”
folgt: $x : (-\infty) = 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : (-\infty) = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich “$x : (-\infty) = 0$” und
aus **95-5**“0 Zahl”
folgt: $x : (-\infty)$ Zahl.

`2:` Aus `1.1`“$x : (-\infty)$ Zahl”
folgt via **96-17**: x Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich “x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

`2:` $x : (+\infty) = x \cdot \mathsf{rez}(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot 0 \stackrel{1}{=} 0.$

`3:` Aus `2`
folgt: $x : (+\infty) = 0.$

$\square$

137-4. Es gilt $0 \neq x : (+\infty)$ genau dann, wenn $x \notin \mathbb{A}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $x : (+\infty) = \mathcal{U}$. Ein analoges Kriterium gilt für $0 \neq x : (-\infty)$. Hieraus ergibt sich der nunmehrige Satz:

137-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x : (+\infty)$.

`ii)` $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

`iii)` $0 \neq x : (-\infty)$.

`iv)` $x : (-\infty) = \mathcal{U}$.

`v)` $x \notin \mathbb{A}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-4** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $0 \neq x : (+\infty)$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **137-3**: $x : (+\infty) = 0$.

`3:` Es gilt 2“$x : (+\infty) = 0$” .
Es gilt `VS` gleich “$0 \neq x : (+\infty)$” .
Ex falso quodlibet folgt: $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-18**: $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

Beweis **137-4** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

`1`: Es gilt: $(x : (-\infty) = 0) \vee (0 \neq x : (-\infty))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : (-\infty) = 0$.

`2`: Aus `1.1.Fall`“$x : (-\infty) = 0$”
folgt via **137-3**: $x : (+\infty) = 0$.

`3`: Aus `2`“$x : (+\infty) = 0$” und
aus **0-18**“$0 \neq \mathcal{U}$”
folgt: $x : (+\infty) \neq \mathcal{U}$.

`4`: Es gilt `3`“$x : (+\infty) \neq \mathcal{U}$”.
Es gilt `VS` gleich “$x : (+\infty) = \mathcal{U}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x : (-\infty)$.

`1.2.Fall` $0 \neq x : (-\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x : (-\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x : (-\infty)$.

`1`: Es gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2`: Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **137-3**: $x : (-\infty) = 0$.

`3`: Es gilt `2`“$x : (-\infty) = 0$”.
Es gilt `VS` gleich “$0 \neq x : (-\infty)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $x : (-\infty) = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : (-\infty) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x : (-\infty) = \mathcal{U}$.

Beweis **137-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $x : (-\infty) = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x : (-\infty) = \mathcal{U}$"
folgt via **96-18**: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (-\infty \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`1.2.Fall` $-\infty \notin \mathbb{A}$.

Es gilt `1.2.Fall` "$-\infty \notin \mathbb{A}$" .
Es gilt **AAI** "$-\infty \in \mathbb{A}$" .
Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \notin \mathbb{A}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \notin \mathbb{A}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

`2:` Aus **0-18** "$0 \neq \mathcal{U}$" und
aus `1` "$x : (+\infty) = \mathcal{U}$"
folgt: $0 \neq x : (+\infty)$.

□

137-5. Nicht nur aus Liebhaberei denn aus zielorientierter Funktionalität kann unter anderem aus **137-3,4** gefolgert werden:

137-5(Satz)

a) $x : (+\infty) = x : (-\infty)$.

b) $x : \mathsf{nan} = x \cdot \mathsf{nan}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-5** a)

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

2: Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **137-3**: $(x : (+\infty) = 0) \wedge (x : (-\infty) = 0)$.

3: Aus 2"$x : (+\infty) = 0 \ldots$" und
aus 2"$\ldots x : (-\infty) = 0$"
folgt: $x : (+\infty) = x : (-\infty)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

2: Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **137-4**: $(x : (+\infty) = \mathcal{U}) \wedge (x : (-\infty) = \mathcal{U})$.

3: Aus 2"$x : (+\infty) = \mathcal{U} \ldots$" und
aus 2"$\ldots x : (-\infty) = \mathcal{U}$"
folgt: $x : (+\infty) = x : (-\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x : (+\infty) = x : (-\infty)$.

b)

1: $x : \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (1 : \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{123-11}}{=} x \cdot \mathsf{nan}$.

2: Aus 1
folgt: $x : \mathsf{nan} = x \cdot \mathsf{nan}$.

□

137-6. Im vorliegenden Satz wird ein Überblick gegeben, in welchen Mengen $1 : x$ ist, wenn x - unter anderem - aus $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b) - g) - f) - d) - e)`:

137-6(Satz)

`a)` *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{R}$".

`b)` *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{R}$".

`c)` *Aus* "$x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}$" *folgt* "$1 : x = 0$".

`d)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{R}$" *oder* "$1 : x = \mathsf{nan}$".

`e)` *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{T}$".

`f)` *Aus* "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$" *folgt* "$1 : x = 0$" *oder* "$1 : x = \mathsf{nan}$".

`g)` *Aus* "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{S}$" *folgt* "$1 : x = \mathsf{nan}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-6** `a)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus **123-6** "$1 : x = \mathsf{rez}(x)$" und
aus `1` "$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt: $1 : x \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **137-6**</u> `c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}$.

`1`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \notin \mathbb{R})$.

`2`: Aus `1`"$x \in \mathbb{S} \dots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`3`: Aus `2`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `1`"$\dots x \notin \mathbb{R}$"
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x = +\infty$.

`4`: $1 : x \overset{\texttt{3.1.Fall}}{=} 1 : (+\infty) \overset{\mathbf{123-11}}{=} 0$.

`5`: Aus `4`
folgt: $1 : x = 0$.

`3.2.Fall` $x = -\infty$.

`4`: $1 : x \overset{\texttt{3.2.Fall}}{=} 1 : (-\infty) \overset{\mathbf{123-11}}{=} 0$.

`5`: Aus `4`
folgt: $1 : x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x = 0$.

Beweis **137-6** `b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{R}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $1 : x = 0$.

`4:` Aus `3`"$1 : x = 0$" und
aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`g)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{S}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \notin \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`3:` Aus `2`"$(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$" und
aus `1`"$\ldots x \notin \mathbb{S}$"
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`4:` $1 : x \stackrel{3}{=} 1 : \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{123\text{-}11}}{=} \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `4`
folgt: $1 : x = \mathsf{nan}$.

`f)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$"
folgt via **123-12**: $(1 : x = 0) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

Beweis **137-6** `d)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \notin \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{R}$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`“$x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(1 : x = 0) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $1 : x = 0$.

`4:` Aus `3.1.Fall`“$1 : x = 0$” und
aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$”
folgt: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

`3.2.Fall` $1 : x = \mathsf{nan}$.

Aus `3.2.Fall`“$1 : x = \mathsf{nan}$”
folgt: $(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

<u>Beweis</u> **137-6** `e)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`"$1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`1.2.Fall` $1 : x = \mathsf{nan}$.

Aus `1.2.Fall`"$1 : x = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \in \mathbb{T}$.

$\square$

137-7. Falls $x, z \in \mathbb{T}$, dann gilt die vertraute Formel $x \cdot (y : z) = (x \cdot y) : z$. Für die ähnliche Gleichung $x \cdot (y : z) = y \cdot (x : z)$ gelingt ein Beweis für $x, y, z \in \mathbb{T}$. Falls $z \in \mathbb{S}$, dann gilt $(x + y) : z = x : z + y : z$:

137-7(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$z \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot (y : z) = (x \cdot y) : z$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *und* "$z \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot (y : z) = y \cdot (x : z)$".

c) *Aus* "$z \in \mathbb{S}$" *folgt* "$(x + y) : z = x : z + y : z$".

RECH-**Notation**.

Beweis **137-7** a) VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-6**: $1 : z \in \mathbb{T}$.

2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus 1 "$1 : z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{T}$: $x \cdot (y \cdot (1 : z)) = (x \cdot y) \cdot (1 : z)$.

3: $x \cdot (y : z) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (y \cdot (1 : z)) \stackrel{2}{=} (x \cdot y) \cdot (1 : z) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x \cdot y) : z$.

4: Aus 3
folgt: $x \cdot (y : z) = (x \cdot y) : z$.

b) VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

1.1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $x \cdot (y : z) = (x \cdot y) : z$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $y \cdot (x : z) = (y \cdot x) : z$.

2: $x \cdot (y : z) \stackrel{1.1}{=} (x \cdot y) : z \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (y \cdot x) : z \stackrel{1.2}{=} y \cdot (x : z)$.

3: Aus 2
folgt: $x \cdot (y : z) = y \cdot (x : z)$.

<u>Beweis **137-7**</u> `c)` `VS` gleich $z \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$z \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-6**: $1 : z \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : z \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $(1 : z) \cdot (x + y) = (1 : z) \cdot x + (1 : z) \cdot y$.

`3:`
$$(x + y) : z$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x + y) \cdot (1 : z)$$
$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (1 : z) \cdot (x + y)$$
$$\stackrel{\mathbf{2}}{=} (1 : z) \cdot x + (1 : z) \cdot y$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x : z + (1 : z) \cdot y$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x : z + y : z.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x + y) : z = x : z + y : z$.

□

137-8. Nun wird $1 : x$ für $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ mit einiger Detailtreue berechnet:

137-8(Satz)

a) *Aus* “$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$” *und* “$0 \neq \mathsf{Im}x$” *folgt* “$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$”.

b) *Aus* “$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$” *und* “$\mathsf{Im}x = 0$” *folgt* “$1 : x = \mathsf{nan}$”.

c) *Aus* “$0 \neq \mathsf{Re}x$” *und* “$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$” *folgt* “$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$”.

d) *Aus* “$\mathsf{Re}x = 0$” *und* “$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$” *folgt* “$1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$”.

REIM.RECH-**Notation**.

Beweis **137-8** a) VS gleich $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x)$.

1.1: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt via **128-6**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

1.2: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt via **95-16**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

1.3: Aus VS
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$.

2: Aus 1.2"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

3: Aus VS gleich "$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x$" und
aus 2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $(\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

4:
$$
\begin{aligned}
1 : x &\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\
&\stackrel{1.1}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan}) \\
&\stackrel{1.3}{=} \mathsf{nan} : \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan}) \\
&\stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan}) \\
&\stackrel{\mathbf{137-5}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan}) \\
&\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{nan}) \\
&\stackrel{3}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{nan}) \\
&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}.
\end{aligned}
$$

5: Aus 4
folgt: $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

<u>Beweis **137-8**</u> `b)` `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`2:` Aus `1`"$x = \mathsf{Re}x$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2`"$x = \mathsf{nan}$" und
aus **123-11**"$1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $1 : x = \mathsf{nan}$.

<u>Beweis **137-8**</u> `c)` `VS` gleich $(0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$"
folgt via **128-6**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus `VS`
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Re}x \ldots$" und
aus `2`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $(\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4:`

$$\begin{aligned}
&1 : x\\
&\overset{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))\\
&\overset{1.1}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan})\\
&\overset{1.3}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{nan}) : \mathsf{nan})\\
&\overset{\mathbf{AAVI}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{nan} : \mathsf{nan})\\
&\overset{\mathbf{97-5}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\\
&\overset{\mathbf{137-5}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\\
&\overset{3}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

Beweis **137-8** `d)` `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0\ldots$"
folgt via **130-2**: $1 : x = -\mathsf{i} : \mathsf{Im}x$.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

`2:` $1 : x \stackrel{1.1}{=} -\mathsf{i} : \mathsf{Im}x \stackrel{1.2}{=} -\mathsf{i} : \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{137-5}}{=} -\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{110-7}}{=} \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

$\square$

137-9. Unter anderem mit Hilfe von **137-8** ergeben sich die folgenden Formeln, von denen die erste bereits via **123-11** bekannt ist, doch hier wegen des Kontexts noch einmal angegeben wird:

137-9(Satz)

a) $1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

b) $1 : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

c) $1 : (\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-9**

REIM-Notation.

---

a)

Via **123-11** gilt: $1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

b)

1: Via **95-12** gilt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

2.1: Aus 1"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = 0$.

2.2: Aus 1"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

3: Aus 2.1"$\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = 0$" und
aus 2.2"$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt via **137-8**: $1 : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

c)

1: Via **95-12** gilt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

2: Via **95-7** gilt: $0 \neq \mathsf{nan}$.

3.1: Aus 1"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus 1"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

3.2: Aus 1"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus 1"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

4: Aus 2"$0 \neq \mathsf{nan}$" und
aus 3.2"$\mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $0 \neq \mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

5: Aus 3.1"$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$" und
aus 4"$0 \neq \mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$"
folgt via **137-8**: $1 : (\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

□

137-10. Im vorliegenden Satz wird ein Überblick gegeben, in welchen Mengen $1 : x$ ist, wenn x - unter anderem - aus $\mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `a)` - `c)` - `b)` - `e)` - `g)` - `h)` - `d)` - `f)`:

137-10(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{C}$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{C}$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$" *folgt* "$1 : x = 0$".

d) *Aus* "x *Zahl*" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{C}$" *oder* "$1 : x = \mathsf{nan}$"
oder "$1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$"
oder "$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$".

e) *Aus* "x *Zahl*" *folgt* "$1 : x$ *Zahl*".

f) *Aus* "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$" *folgt* "$1 : x = 0$" *oder* "$1 : x = \mathsf{nan}$"
oder "$1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$"
oder "$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$".

g) *Aus* "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$" *folgt* "$1 : x = \mathsf{nan}$" *oder* "$1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$"
oder "$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$".

h) *Aus* "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$" *folgt* "$1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-10**

REIM-**Notation**.

---

a) VS gleich $x \in \mathbb{C}$.

1.1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

1.2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

2.1: Aus 1.3"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6**: $1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

2.2: Aus 1.2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

3.1: Aus 1.1"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" und
aus 2.1"$1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) \in \mathbb{R}$.

3.2: Aus 2.2"$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$" und
aus 2.1"$1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(-\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) \in \mathbb{R}$.

4.1: $\mathsf{Re}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))$.

4.2: $\mathsf{Im}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (-\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))$.

5.1: Aus 4.1"$\mathsf{Re}(1 : x) = \ldots = (\mathsf{Re}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))$" und
aus 3.1"$(\mathsf{Re}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}$.

5.2: Aus 4.2"$\mathsf{Im}(1 : x) = \ldots = (-\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))$" und
aus 3.2"$(-\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}$.

6: Aus 5.1"$\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}$" und
aus 5.2"$\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **137-10**</u> `c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **128-8**: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`2:` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{B}$”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Im}x \text{ Zahl})$.

`4.1:` Aus `3`“$\mathsf{Re}x$ Zahl...”
folgt via **137-3**: $(\mathsf{Re}x) : (+\infty) = 0$.

`4.2:` Aus `3`“$\mathsf{Im}x$ Zahl”
folgt via **117-4**: $-\mathsf{Im}x$ Zahl.

`5:` Aus `4.2`“$-\mathsf{Im}x$ Zahl”
folgt via **137-3**: $(-\mathsf{Im}x) : (+\infty) = 0$.

`6.1:` $\mathsf{Re}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{1.2}{=} (\mathsf{Re}x) : (+\infty) \stackrel{4.1}{=} 0$.

`6.2:` $\mathsf{Im}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{1.2}{=} (-\mathsf{Im}x) : (+\infty) \stackrel{5}{=} 0$.

`7:` Aus `6.1`“$\mathsf{Re}(1 : x) = \ldots = 0$” und
aus `6.2`“$\mathsf{Im}(1 : x) = \ldots = 0$”
folgt via **96-31**: $1 : x = 0$.

Beweis **137-10** `b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (x \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$" und
aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`3:` Aus 2 "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $1 : x = 0$.

`4:` Aus 3 "$1 : x = 0$" und
aus **101-5** "$0 \in \mathbb{C}$"
folgt: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`e)` `VS` gleich x Zahl.

Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **123-7**: $1 : x$ Zahl.

<u>Beweis **137-10**</u> g) `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **128-7**: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$.

`2:` Es gilt: $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\mathsf{Im}x = 0$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$" und
aus `2.1.Fall`"$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **137-8**: $1 : x = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`
folgt:
$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`2.2.Fall` $0 \neq \mathsf{Im}x$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$" und
aus `2.2.Fall`"$0 \neq \mathsf{Im}x$"
folgt via **137-8**: $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`
folgt:
$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

...

Beweis **137-10** g) `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$.

2: Es gilt: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (0 \neq \mathsf{Re}x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\mathsf{Re}x = 0$.

3: Aus `2.1.Fall`“$\mathsf{Re}x = 0$” und
aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$”
folgt via **137-8**: $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

4: Aus 3
folgt:
$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`2.2.Fall` $0 \neq \mathsf{Re}x$.

3: Aus `2.2.Fall`“$0 \neq \mathsf{Re}x$” und
aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$”
folgt via **137-8**: $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

4: Aus 3
folgt:
$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

<u>Beweis **137-10**</u> `h)` `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{nan} = \mathsf{Re}\,\mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$1 : x = \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{nan} = \mathsf{Re}\,\mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3"$\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **128-7**: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`1.2.Fall` $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`"$1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3"$\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **128-7**: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`1.3.Fall` $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.3.Fall`"$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3"$\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **128-7**: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

<u>Beweis **137-10**</u> `d)` `VS` gleich x Zahl.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{B}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`
folgt:
$(1 : x \in \mathbb{C}) \vee (1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich “x Zahl”
folgt via **95-6**: $x \in \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2`“$x \in \mathbb{A}$” und
aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{B}$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`“$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`5:` Aus `4`
folgt:
$(1 : x \in \mathbb{C}) \vee (1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(1 : x \in \mathbb{C}) \vee (1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

Beweis **137-10** `f)` `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{B}$" und
aus `1`"$\ldots x \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $1 : x = 0$.

`5:` Aus `4`
folgt:
$(1 : x = 0) \vee (1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`3:` Aus `1`"$x \in \mathbb{A} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`5:` Aus `4`
folgt:
$(1 : x = 0) \vee (1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(1 : x = 0) \vee (1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

□

137-11 Im nun vorliegenden :**Satz Zahlen** wird ein Überblick gegeben, in welcher der Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ der Quotient $x : y$ liegt, wenn x, y ebenfalls aus den "arithmetischen Grundmengen" $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ sind:

137-11(Satz) (**:SZ: :Satz Zahlen**)

a) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x : y \in \mathbb{R}$".*

b) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{S}$" folgt "$x : y \in \mathbb{R}$".*

c) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{T}$" folgt "$x : y \in \mathbb{T}$".*

d) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{C}$" folgt "$x : y \in \mathbb{C}$".*

e) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{B}$" folgt "$x : y \in \mathbb{C}$".*

f) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "y Zahl" folgt "$x : y$ Zahl".*

g) *Aus "$x \in \mathbb{S}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x : y \in \mathbb{S}$".*

h) *Aus "$x \in \mathbb{S}$" und "$y \in \mathbb{S}$" folgt "$x : y \in \mathbb{S}$".*

i) *Aus "$x \in \mathbb{S}$" und "$y \in \mathbb{T}$" folgt "$x : y \in \mathbb{T}$".*

j) *Aus "$x \in \mathbb{S}$" und "$y \in \mathbb{C}$" folgt "$x : y \in \mathbb{B}$".*

k) *Aus "$x \in \mathbb{S}$" und "$y \in \mathbb{B}$" folgt "$x : y \in \mathbb{B}$".*

l) *Aus "$x \in \mathbb{S}$" und "y Zahl" folgt "$x : y$ Zahl".*

m) *Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x : y \in \mathbb{T}$".*

n) *Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$y \in \mathbb{S}$" folgt "$x : y \in \mathbb{T}$".*

o) *Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$y \in \mathbb{T}$" folgt "$x : y \in \mathbb{T}$".*

...

RECH-**Notation**.

137-11(Satz) ...

p) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

q) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

r) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

s) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x : y \in \mathbb{C}$".

t) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x : y \in \mathbb{C}$".

u) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

v) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x : y \in \mathbb{C}$".

w) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x : y \in \mathbb{C}$".

x) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

y) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x : y \in \mathbb{B}$".

z) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x : y \in \mathbb{B}$".

aa) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

ab) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

ac) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

ad) *Aus* "$x \in \mathbb{B}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x : y$ *Zahl*".

...

RECH-**Notation**.

137-11(Satz) ...

ae) *Aus "x Zahl" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x : y$ Zahl".*

af) *Aus "x Zahl" und "$y \in \mathbb{S}$" folgt "$x : y$ Zahl".*

ag) *Aus "x Zahl" und "$y \in \mathbb{T}$" folgt "$x : y$ Zahl".*

ah) *Aus "x Zahl" und "$y \in \mathbb{C}$" folgt "$x : y$ Zahl".*

ai) *Aus "x Zahl" und "$y \in \mathbb{B}$" folgt "$x : y$ Zahl".*

aj) *Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$x : y$ Zahl".*

RECH-**Notation**.

Beweis **137-11** a) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "... $y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6**: $1 : y \in \mathbb{R}$.

2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R}$ ..." und
aus 1 "$1 : y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$.

3: Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

4: Aus 3 "$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus 2 "$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{R}$.

b) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich "... $y \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-6**: $1 : y \in \mathbb{R}$.

2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R}$ ..." und
aus 1 "$1 : y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$.

3: Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

4: Aus 3 "$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus 2 "$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{R}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-6**: $1 : y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{T}$.

`d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{C}$.

`e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **137-10**: $1 : y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y$ Zahl"
folgt via **·SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6**: $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **·SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{S}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{S}$.

`h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-6**: $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **·SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{S}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{S}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-6**: $1 : y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{T}$.

`j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{B}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{B}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{B}$.

`k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{B}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{B}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{B}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **137-10**: $1 : y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y$ Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`m)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{T}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{T}$.

`n)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{T}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{T}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `o)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{T}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{T}$.

`p)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`q)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

<u>Beweis **137-11**</u> `r)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **137-10**: $1 : y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y$ Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`s)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{C}$.

`t)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{C}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `u)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`v)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{C}$.

`w)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y) \in \mathbb{C}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{C}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `x)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **137-10**: $1 : y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y$ Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`y)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{B}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{B}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{B}$.

`z)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{B}$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{B}$"
folgt: $x : y \in \mathbb{B}$.

<u>Beweis **137-11**</u> `aa)` `VS` gleich $(x\in\mathbb{B})\wedge(y\in\mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y\in\mathbb{T}$"
folgt via **137-6** : $1:y\in\mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$1:y\in\mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x\in\mathbb{B}\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1:y)\cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x:y=(1:y)\cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x:y=(1:y)\cdot x$" und
aus `2`"$(1:y)\cdot x$ Zahl"
folgt: $x:y$ Zahl.

`ab)` `VS` gleich $(x\in\mathbb{B})\wedge(y\in\mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y\in\mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1:y\in\mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$1:y\in\mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x\in\mathbb{B}\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1:y)\cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x:y=(1:y)\cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x:y=(1:y)\cdot x$" und
aus `2`"$(1:y)\cdot x$ Zahl"
folgt: $x:y$ Zahl.

`ac)` `VS` gleich $(x\in\mathbb{B})\wedge(y\in\mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y\in\mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1:y\in\mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$1:y\in\mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x\in\mathbb{B}\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1:y)\cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x:y=(1:y)\cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x:y=(1:y)\cdot x$" und
aus `2`"$(1:y)\cdot x$ Zahl"
folgt: $x:y$ Zahl.

Beweis **137-11** `ad)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **137-10**: $1 : y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$" und
aus `1`"$1 : y$ Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`ae)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`af)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

<u>Beweis **137-11**</u> `ag)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-6** : $1 : y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$" und
aus `1`"$1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot (1 : y)$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `3`"$x : y = x \cdot (1 : y)$" und
aus `2`"$x \cdot (1 : y)$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`ah)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

`ai)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$1 : y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(1 : y) \cdot x$ Zahl.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$x : y = (1 : y) \cdot x$" und
aus `2`"$(1 : y) \cdot x$ Zahl"
folgt: $x : y$ Zahl.

<u>Beweis **137-11**</u> `aj)` `VS` gleich $(x\ \text{Zahl}) \wedge (y\ \text{Zahl})$.

Aus `VS` gleich "x Zahl…" und
aus `VS` gleich "…y Zahl"
folgt via **96-17**: $x : y\ \text{Zahl}$.

□

137-12. Mit Hilfe von **137-9** kann auf einfache Weise gezeigt werden, dass $x = \mathsf{nan}$ genau dann, wenn $1 : x = \mathsf{nan}$:

137-12(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = \mathsf{nan}$.

`ii)` $1 : x = \mathsf{nan}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-12**

`REIM`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x = \mathsf{nan}$.

Aus **137-9**"$1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" und
aus `VS` gleich "$x = \mathsf{nan}$"
folgt: $1 : x = \mathsf{nan}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $1 : x = \mathsf{nan}$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$1 : x = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$1 : x = \mathsf{nan}$" und
aus **101-5**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{C}$"
folgt: $1 : x \notin \mathbb{C}$.

`2.1`: Aus `1.1`"$1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x$ Zahl.

`2.2`: Aus `1.1`"$1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$.

...

Beweis **137-12** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $1 : x = \mathsf{nan}$.

...

`3.1:` Aus `2.1`"$1 : x$ Zahl"
folgt via **123-7**: x Zahl.

`3.2:`
$$0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} -0 \stackrel{2.2}{=} -\mathsf{Im}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} -(-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{FS-:}}{=} (-(-\mathsf{Im}x)) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} (\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x).$$

`4.1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`5:` Aus `4.1.1.Fall`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`6:` Es gilt `5`"$1 : x \in \mathbb{C}$".
Es gilt `1.2`"$1 : x \notin \mathbb{C}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathbb{B}$.

`4.1.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \notin \mathbb{B}$"

`4.2:` Aus `3.1`"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`5:` Aus `4.2`"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `A1` gleich "$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

...

<u>Beweis **137-12**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $1 : x = \mathsf{nan}$.

...

`6.1`: Aus `5`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **128-7**: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`6.2`: Aus `5`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **128-7**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

`7`: Aus `3.2`"$0 = \ldots = (\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$" und
aus `6.2`"$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$"
folgt: $0 = (\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan}$.

`8`: Aus `7`
folgt: $(\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan} = 0$.

`9`: Aus `8`"$(\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan} = 0$"
folgt via **137-1**: $\mathsf{Im}x = 0$.

`10.1`: Aus `9`"$\mathsf{Im}x = 0$" und
aus **95-7**"$0 \neq \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}x \neq \mathsf{nan}$.

`10.2`: Aus `9`"$\mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`11`: Aus `6.1`"$(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$" und
aus `10.1`"$\mathsf{Im}x \neq \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$.

`12`: Aus `10.2`"$x = \mathsf{Re}x$" und
aus `11`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}$"
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

□

137-13. Mit Hilfe von **137-12** kann nun auf einfache Weise gezeigt werden, dass $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$ genau dann, wenn $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$:

137-13(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`ii)` $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-13** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

Aus **137-9**"$1 : (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus `VS` gleich "$x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$"
folgt: $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`1:`

$$1 : (\mathsf{i} \cdot x) \stackrel{\mathbf{136-4}}{=} -\mathsf{i} \cdot (1 : x) \stackrel{\texttt{VS}}{=} -\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = -(\mathsf{i} \cdot (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(-\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{100-2}}{=} \mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1`"$1 : (\mathsf{i} \cdot x) = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt via **137-12**: $\mathsf{i} \cdot x = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{i} \cdot x = \mathsf{nan}$"
folgt via **133-7**: $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

□

137-14. Mit Hilfe von **137-8** kann auf einfache Weise ein Kriterium für $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$ hergeleitet werden:

137-14(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` "$(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x)$" *oder* "$(0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$".

`ii)` $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **137-14** `i) ⇒ ii)`

`VS` gleich $((\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x)) \vee ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $((\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x)) \vee ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x)$.

Aus `1.1.Fall`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots 0 \neq \mathsf{Im}x$"
folgt via **137-8**: $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`1.2.Fall` $(0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

Aus `1.2.Fall`"$0 \neq \mathsf{Re}x \ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}x = \mathsf{nan}$"
folgt via **137-8**: $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

Beweis **137-14** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

1.1: Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-29**: $\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$ Zahl.

1.2: Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**:
$$(\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}).$$

2.1: Aus VS gleich "$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 1.1"$\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$ Zahl"
folgt: $1 : x$ Zahl.

2.2: Aus VS gleich "$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 1.2"$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

2.3: Aus VS gleich "$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 1.2"$\ldots \mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

3.1: $$\mathsf{nan} \stackrel{2.2}{=} \mathsf{Re}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x).$$

3.2: $$\mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\mathsf{nan}$$
$$\stackrel{2.3}{=} -\mathsf{Im}(1 : x)$$
$$\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} -((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$$
$$= -(-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} (-(-\mathsf{Im}x)) : \mathsf{ab2}(x)$$
$$\stackrel{\mathbf{100-4}}{=} (\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x).$$

3.3: Aus 2.1"$1 : x$ Zahl"
folgt via **123-7**: x Zahl.

3.4: Aus 2.2"$\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **128-7**: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

...

Beweis **137-14** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

...

4.1: Aus 3.1“$\mathsf{nan} = \ldots = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$” und
aus **95-7**“$0 \neq \mathsf{nan}$”
folgt: $0 \neq (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

4.2: Aus 3.2“$\mathsf{nan} = \ldots = (\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$” und
aus **95-7**“$0 \neq \mathsf{nan}$”
folgt: $0 \neq (\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

4.3: Aus 3.3“x Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

4.4: Aus 3.4“$1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$”
folgt via **5-3**: $1 : x \notin \mathbb{B}$.

5: Aus 4.4“$1 : x \notin \mathbb{B}$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$”
folgt via **0-4**: $1 : x \notin \mathbb{C}$.

6.1: Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`6.1.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

7: Aus 6.1.1.Fall“$x \in \mathbb{B}$”
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

8: Es gilt 7“$1 : x \in \mathbb{C}$”.
Es gilt 5“$1 : x \notin \mathbb{C}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathbb{B}$.

`6.1.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: A1 | “$x \notin \mathbb{B}$”

6.2: Aus 4.3“$x \in \mathbb{A}$” und
aus A1 gleich “$x \notin \mathbb{B}$”
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

...

Beweis **137-14** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

...

`7.1:` Aus `6.2`“$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$”
folgt via **128-7**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$.

`7.2:` Aus `6.2`“$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$”
folgt via **128-7**: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$.

`8.1:` Aus `4.1`“$0 \neq (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$” und
aus `7.1`“$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$”
folgt: $0 \neq (\mathsf{Re}x) : \mathsf{nan}$.

`8.2:` Aus `4.2`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$” und
aus `7.1`“$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$”
folgt: $0 \neq (\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan}$.

`9.1:` Aus `8.1`“$0 \neq (\mathsf{Re}x) : \mathsf{nan}$”
folgt via **137-2**: $0 \neq \mathsf{Re}x$.

`9.2:` Aus `8.2`“$0 \neq (\mathsf{Im}x) : \mathsf{nan}$”
folgt via **137-2**: $0 \neq \mathsf{Im}x$.

`10:` Aus `7.2`“$(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan})$”,
aus `9.1`“$0 \neq \mathsf{Re}x$” und
aus `9.2`“$0 \neq \mathsf{Im}x$”
folgt: $((\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \neq \mathsf{Im}x)) \vee ((0 \neq \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Im}x = \mathsf{nan}))$.

□

137-15. Mit dem numehrigen Satz wird eine Zusammenfassung von **137-10** gegeben, die auf Aussagen über $\mathsf{Re}(1:x), \mathsf{Im}(1:x)$ beruht:

137-15(Satz)

a) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" folgt "$\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}$" und "$\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}$".*

b) *Aus "$x \in \mathbb{B}$" folgt "$\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}$" und "$\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}$".*

c) *Aus "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$" folgt "$\mathsf{Re}(1:x) = 0$" oder "$\mathsf{Re}(1:x) = \mathsf{nan}$".*

d) *Aus "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$" folgt "$\mathsf{Im}(1:x) = 0$" oder "$\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}$".*

e) *Aus "x Zahl" folgt "$\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}$" oder "$\mathsf{Re}(1:x) = \mathsf{nan}$".*

f) *Aus "x Zahl" folgt "$\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}$" oder "$\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}$".*

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **137-15** `a)` `VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R})$.

`b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R})$.

Beweis **137-15** `c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**:
$$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{nan} = \mathsf{Renan}$.

`3:` Aus 2 "$\mathsf{nan} = \mathsf{Renan}$" und
aus `1.1.Fall` "$1 : x = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{nan} = \mathsf{Re}(1 : x)$.

`4:` Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus 4
folgt: $(\mathsf{Re}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`1.2.Fall` $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = 0$.

`3:` Aus `1.2.Fall` "$1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 2 "$\mathsf{Re}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = 0$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = 0$.

`4:` Aus 3
folgt: $(\mathsf{Re}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`1.3.Fall` $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.3.Fall` "$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 2 "$\mathsf{Re}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3
folgt: $(\mathsf{Re}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$(\mathsf{Re}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}).$$

<u>Beweis **137-15**</u> `d)` `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**:
$$(1 : x = \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Imnan} = 0$.

`3:` Aus 2"$\mathsf{Imnan} = 0$" und
aus `1.1.Fall`"$1 : x = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$.

`4:` Aus 3
folgt: $(\mathsf{Im}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`1.2.Fall` $1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`"$1 : x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3
folgt: $(\mathsf{Im}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`1.3.Fall` $1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.3.Fall`"$1 : x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{Im}(\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3
folgt: $(\mathsf{Im}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$(\mathsf{Im}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan}).$$

Beweis **137-15** `e)` `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`3:` Aus `1`"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `2`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$(\mathsf{Re}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\mathsf{Re}(1 : x) = 0$.

`5:` Aus `4.1.Fall`"$\mathsf{Re}(1 : x) = 0$" und
aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`4.2.Fall` $\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

Aus `4.2.Fall`
folgt: $(\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

<u>Beweis **137-15**</u> `f)` `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`3:` Aus `1`"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$(\mathsf{Im}(1 : x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$.

`5:` Aus `4.1.Fall`"$\mathsf{Im}(1 : x) = 0$" und
aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`4.2.Fall` $\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan}$.

Aus `3.2.Fall`
folgt: $(\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Im}(1 : x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1 : x) = \mathsf{nan})$.

□

137-16. Ohne viel Mühe kann via **137-15**`ef)` auf Situationen ohne die Voraussetzung x Zahl geschlossen werden:

137-16(Satz)

a) *"*$\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R}$*" oder "*$\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan}$*" oder "*$\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U}$*".*

b) *"*$\mathsf{Im}(1:x)\in\mathbb{R}$*" oder "*$\mathsf{Im}(1:x)=\mathsf{nan}$*" oder "*$\mathsf{Im}(1:x)=\mathcal{U}$*".*

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **137-16** `a)`

`1:` Vai **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl})\vee(x\notin\mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **137-15**: $(\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan})$.

`3:` Aus 2
folgt: $(\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x\notin\mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x\notin\mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $1:x=\mathcal{U}$.

`3:` Aus 2"$1:x=\mathcal{U}$" und
aus **96-19**"$\mathsf{Re}\mathcal{U}=\mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U}$.

`4:` Aus 3
folgt: $(\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U}).$$

<u>Beweis **137-16** `b)`</u>

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **137-15**: $(\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan})$.

`3:` Aus 2
folgt: $(\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-19**: $1 : x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2"$1 : x = \mathcal{U}$" und
aus **96-19**"$\mathsf{Im}\mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus 3
folgt: $(\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U}).$$

□

137-17. Weder Real- noch ImaginärTeil von $1 : x$ können gleich $\pm\infty$ sein. Im Speziellen gilt $1 : x \neq \pm\infty$ und $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (\pm\infty)$:

137-17(Satz)

a) $\mathsf{Re}(1 : x) \neq +\infty$.

b) $\mathsf{Re}(1 : x) \neq -\infty$.

c) $\mathsf{Im}(1 : x) \neq +\infty$.

d) $\mathsf{Im}(1 : x) \neq -\infty$.

e) $1 : x \neq +\infty$.

f) $1 : x \neq -\infty$.

g) $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

h) $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **137-17** a)

1: Via **137-16** gilt: $(\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(1:x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}(1:x) = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{Re}(1:x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $\mathsf{Re}(1:x) \neq +\infty$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Re}(1:x) = \mathsf{nan}$.

Aus `1.2.Fall` "$\mathsf{Re}(1:x) = \mathsf{nan}$" und
aus **AAI** "$\mathsf{nan} \neq +\infty$"
folgt: $\mathsf{Re}(1:x) \neq +\infty$.

`1.3.Fall` $\mathsf{Re}(1:x) = \mathcal{U}$.

2: Aus **95-3** "$+\infty$ Menge"
folgt via **0-17**: $+\infty \neq \mathcal{U}$.

3: Aus 2 "$+\infty \neq \mathcal{U}$" und
aus `1.3.Fall` "$\mathsf{Re}(1:x) = \mathcal{U}$"
folgt: $+\infty \neq \mathsf{Re}(1:x)$.

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(1:x) \neq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\mathsf{Re}(1:x) \neq +\infty$.

Beweis **137-17** `b)`

`1:` Via **137-16** gilt: $(\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan})\vee(\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Re}(1:x)\in\mathbb{R}$”
folgt via **95-17**: $\mathsf{Re}(1:x)\neq-\infty$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan}$.

Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Re}(1:x)=\mathsf{nan}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan}\neq-\infty$”
folgt: $\mathsf{Re}(1:x)\neq-\infty$.

`1.3.Fall` $\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U}$.

`2:` Aus **95-3**“$-\infty$ Menge”
folgt via **0-17**: $-\infty\neq\mathcal{U}$.

`3:` Aus 2“$-\infty\neq\mathcal{U}$” und
aus `1.3.Fall`“$\mathsf{Re}(1:x)=\mathcal{U}$”
folgt: $-\infty\neq\mathsf{Re}(1:x)$.

`4:` Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(1:x)\neq-\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\mathsf{Re}(1:x)\neq-\infty$.

<u>Beweis **137-17**</u> `c)`

`1:` Via **137-16** gilt: $(\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **95-17**: $\mathsf{Im}(1:x) \neq +\infty$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}$.

Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \neq +\infty$”
folgt: $\mathsf{Im}(1:x) \neq +\infty$.

`1.3.Fall` $\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U}$.

`2:` Aus **95-3**“$+\infty$ Menge”
folgt via **0-17**: $+\infty \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2“$+\infty \neq \mathcal{U}$” und
aus `1.3.Fall`“$\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U}$”
folgt: $+\infty \neq \mathsf{Im}(1:x)$.

`4:` Aus 3
folgt: $\mathsf{Im}(1:x) \neq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\mathsf{Im}(1:x) \neq +\infty$.

Beweis **137-17** `d)`

`1:` Via **137-16** gilt: $(\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{Im}(1:x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **95-17**: $\mathsf{Im}(1:x) \neq -\infty$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}$.

Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{Im}(1:x) = \mathsf{nan}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \neq -\infty$”
folgt: $\mathsf{Im}(1:x) \neq -\infty$.

`1.3.Fall` $\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U}$.

`2:` Aus **95-3**“$-\infty$ Menge”
folgt via **0-17**: $-\infty \neq \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2“$-\infty \neq \mathcal{U}$” und
aus `1.3.Fall`“$\mathsf{Im}(1:x) = \mathcal{U}$”
folgt: $-\infty \neq \mathsf{Im}(1:x)$.

`4:` Aus 3
folgt: $\mathsf{Im}(1:x) \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\mathsf{Im}(1:x) \neq -\infty$.

Beweis **137-17** `e)`

`1:` Es gilt: $(1 : x = +\infty) \vee (1 : x \neq +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = +\infty$.

`2:` Aus **99-15** "$+\infty = \mathsf{Re}(+\infty)$" und aus `1.1.Fall` "$1 : x = +\infty$" folgt: $+\infty = \mathsf{Re}(1 : x)$.

`3:` Es gilt `2` "$+\infty = \mathsf{Re}(1 : x)$" .
Via des bereits bewiesenen `a)` gilt "$\mathsf{Re}(1 : x) \neq +\infty$" .
Ex falso quodlibet folgt: $1 : x \neq +\infty$.

`1.2.Fall` $1 : x \neq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \neq +\infty$.

`f)`

`1:` Es gilt: $(1 : x = -\infty) \vee (1 : x \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = -\infty$.

`2:` Aus **99-15** "$-\infty = \mathsf{Re}(-\infty)$" und aus `1.1.Fall` "$1 : x = -\infty$" folgt: $-\infty = \mathsf{Re}(1 : x)$.

`3:` Es gilt `2` "$-\infty = \mathsf{Re}(1 : x)$" .
Via des bereits bewiesenen `b)` gilt "$\mathsf{Re}(1 : x) \neq -\infty$" .
Ex falso quodlibet folgt: $1 : x \neq -\infty$.

`1.2.Fall` $1 : x \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \neq -\infty$.

Beweis **137-17** g)

1: Es gilt: $(1 : x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (+\infty))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

2: Aus **95-12**"$+\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot (+\infty)) = +\infty$.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot (+\infty)) = +\infty$" und
aus `1.1.Fall`"$1 : x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = +\infty$.

4: Es gilt 3"$\mathsf{Im}(1 : x) = +\infty$".
Via des bereits bewiesenen `c)` gilt "$\mathsf{Im}(1 : x) \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

`1.2.Fall` $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

h)

1: Es gilt: $(1 : x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)) \vee (1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

2: Aus **95-12**"$-\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **134-1**: $\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot (-\infty)) = -\infty$.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}(\mathsf{i} \cdot (-\infty)) = -\infty$" und
aus `1.1.Fall`"$1 : x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$"
folgt: $\mathsf{Im}(1 : x) = -\infty$.

4: Es gilt 3"$\mathsf{Im}(1 : x) = -\infty$".
Via des bereits bewiesenen `d)` gilt "$\mathsf{Im}(1 : x) \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

`1.2.Fall` $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \neq \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

□

137-18. Da für $z \in \mathbb{B}$ via **137-10** die Aussage $1 : z \in \mathbb{C}$ folgt, ergeben sich via **AGM**$\mathbb{C}$ und via **DG**$\mathbb{C}$ die folgenden, vertraute Aussagen:

137-18(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$z \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x \cdot (y : z) = (x \cdot y) : z$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{C}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *und* "$z \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x \cdot (y : z) = y \cdot (x : z)$".

c) *Aus* "$z \in \mathbb{B}$" *folgt* "$(x + y) : z = x : z + y : z$".

RECH-**Notation**.

Beweis **137-18** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (z \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : z \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$1 : z \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x \cdot (y \cdot (1 : z)) = (x \cdot y) \cdot (1 : z)$.

`3:` $x \cdot (y : z) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} x \cdot (y \cdot (1 : z)) \stackrel{2}{=} (x \cdot y) \cdot (1 : z) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (x \cdot y) : z$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot (y : z) = (x \cdot y) : z$.

`b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (z \in \mathbb{B})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y : z) = (x \cdot y) : z$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $y \cdot (x : z) = (y \cdot x) : z$.

`2:` $x \cdot (y : z) \stackrel{1.1}{=} (x \cdot y) : z \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (y \cdot x) : z \stackrel{1.2}{=} y \cdot (x : z)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x \cdot (y : z) = y \cdot (x : z)$.

`c)` `VS` gleich $z \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$z \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : z \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$1 : z \in \mathbb{C}$"
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $(1 : z) \cdot (x + y) = (1 : z) \cdot x + (1 : z) \cdot y$.

`3:`
$$\begin{aligned} &(x + y) : z \\ \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} &(1 : z) \cdot (x + y) \\ \stackrel{2}{=} &(1 : z) \cdot x + (1 : z) \cdot y \\ \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} &x : z + (1 : z) \cdot y \\ \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} &x : z + y : z. \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x + y) : z = x : z + y : z$.

$\square$

137-19. Nun wird $1 : x = 0$ und $0 \neq 1 : x$ unter besonderer Berücksichtigung von $x \in \mathbb{R}$ diskutiert:

137-19(Satz)

a) *Aus* "$x = 0$" *folgt* "$1 : x = 0$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$1 : x = 0$" *folgt* "$x = 0$".

c) *Aus* "$0 \neq 1 : x$" *folgt* "$0 \neq x$".

d) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$0 \neq x$" *folgt* "$0 \neq 1 : x$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-19** `a)` `VS` gleich $x = 0$.

Aus **98-24**"$1 : 0 = 0$" und
aus `VS` gleich "$x = 0$"
folgt: $1 : x = 0$.

<u>Beweis **137-19**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (1 : x = 0)$.

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$0 \neq x$" und aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \dots$" folgt via **AAV**: $x \cdot \mathsf{rez}(x) = 1$.

`2.2:` Aus `VS` folgt: $1 : x = 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \dots$" folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3` "x Zahl" folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`5:` $1 \stackrel{2.1}{=} x \cdot \mathsf{rez}(x) \stackrel{\mathbf{123-6}}{=} x \cdot (1 : x) \stackrel{2.2}{=} x \cdot 0 \stackrel{4}{=} 0$.

`6:` Es gilt `5` "$1 = \ldots = 0$". Via **95-2** gilt "$0 \neq 1$". Ex falso quodlibet folgt: $x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = 0$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x = 0) \Rightarrow (1 : x = 0)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Rightarrow (0 \neq x)$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $((x \in \mathbb{R}) \wedge (1 : x = 0)) \Rightarrow (x = 0)$.

`2:` Aus `1` folgt: $((x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq x)) \Rightarrow (0 \neq 1 : x)$.

$\square$

137-20. Nun wird $1 : x = 0$ und $0 \neq 1 : x$ unter besonderer Berücksichtigung von $x \in \mathbb{S}$ diskutiert:

137-20(Satz)

a) *Aus* "$x = +\infty$" *folgt* "$1 : x = 0$".

b) *Aus* "$x = -\infty$" *folgt* "$1 : x = 0$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$1 : x = 0$"
folgt "$(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$".

d) *Aus* "$0 \neq 1 : x$" *folgt* "$x \neq +\infty$".

e) *Aus* "$0 \neq 1 : x$" *folgt* "$x \neq -\infty$".

f) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$0 \neq x$" *und* "$x \neq +\infty$" *und* "$x \neq -\infty$"
folgt "$0 \neq 1 : x$".

RECH-**Notation**.

Beweis **137-20** a) VS gleich $x = +\infty$.

Aus **123-11** "$1 : (+\infty) = 0$" und
aus VS gleich "$x = +\infty$"
folgt: $1 : x = 0$.

b) VS gleich $x = -\infty$.

Aus **123-11** "$1 : (-\infty) = 0$" und
aus VS gleich "$x = -\infty$"
folgt: $1 : x = 0$.

<u>Beweis **137-20**</u> `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (1 : x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x = 0$"
folgt via **137-19**: $x = 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

Aus `1.2.Fall`
folgt: $(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

Aus `1.3.Fall`
folgt: $(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

<u>Beweis **137-20**</u> `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x = +\infty) \Rightarrow (1 : x = 0)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Rightarrow (x \neq +\infty)$.

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(x = -\infty) \Rightarrow (1 : x = 0)$.

`2:` Aus `1` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Rightarrow (x \neq -\infty)$.

`f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$((x \in \mathbb{S}) \wedge (1 : x = 0)) \Rightarrow ((x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)).$$

`2:` Aus `1` folgt: $((x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq x) \wedge (x \neq +\infty) \wedge (x \neq -\infty)) \Rightarrow (0 \neq 1 : x)$.

□

137-21. Nun wird $1 : x = 0$ und $0 \neq 1 : x$ unter besonderer Berücksichtigung von $x \in \mathbb{T}$ diskutiert. Im Vergleich zu **137-20** ändert sich nicht viel:

137-21(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$1 : x = 0$"
folgt "$(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$0 \neq x$" *und* "$x \neq +\infty$" *und* "$x \neq -\infty$"
folgt "$0 \neq 1 : x$".

RECH-**Notation**.

Beweis **137-21** `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (1 : x = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \dots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{S}$.

Aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\dots 1 : x = 0$"
folgt via **137-20**: $(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x = \mathsf{nan}$" und
aus **137-9** "$1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $1 : x = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus **95-7** "$0 \neq \mathsf{nan}$" und
aus 2 "$1 : x = \mathsf{nan}$"
folgt: $0 \neq 1 : x$.

`4:` Es gilt 3 "$0 \neq 1 : x$".
Es gilt `VS` gleich "$\dots 1 : x = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$((x \in \mathbb{T}) \wedge (1 : x = 0)) \Rightarrow ((x = 0) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty))$.

`2:` Aus 1
folgt: $((x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq x) \wedge (x \neq +\infty) \wedge (x \neq -\infty)) \Rightarrow (0 \neq 1 : x)$.

□

137-22. Es wird nun eine voraussetzungsfreie Charakterisierung all jener x gegeben, für die $1 : x = 0$ gilt:

137-22(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $1 : x = 0$.

`ii)` $1 : \mathsf{ab2}(x) = 0$.

`iii)` "$\mathsf{ab2}(x) = 0$" *oder* "$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$".

`iv)` "$x = 0$" *oder* "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-22** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $1 : x = 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$1 : x = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt: $1 : x$ Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$1 : x = 0$"
folgt via **96-31**: $\mathsf{Re}(1 : x) = 0$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$1 : x = 0$"
folgt via **96-31**: $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$.

...

<u>Beweis **137-22**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $1 : x = 0.$

...

`2.1:` Aus `1.1`"$1 : x$ Zahl"
folgt via **123-7**: x Zahl.

`2.2:` $(\mathsf{Re}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) \stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} \mathsf{Re}(1 : x) \stackrel{1.2}{=} 0.$

`2.3:`
$$(\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))$$
$$\stackrel{\mathbf{136-1}}{=} (\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$$
$$\stackrel{\mathbf{100-4}}{=} (-(-\mathsf{Im}x)) : \mathsf{ab2}(x)$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} -((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$$
$$\stackrel{\mathbf{123-9}}{=} -\mathsf{Im}(1 : x)$$
$$\stackrel{1.3}{=} -0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$$

`3.1:` Aus `2.1`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}).$

`3.2:` Aus `2.1`"x Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}.$

`4:` Aus `3.2`"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-6**: $1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}.$

`5.1:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `4`"$1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) = \ldots = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{Re}x = 0) \vee (1 : \mathsf{ab2}(x) = 0).$

`5.2:` Aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$",
aus `4`"$1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$" und
aus `2.3`"$(\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)) = \ldots = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (1 : \mathsf{ab2}(x) = 0).$

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)) \vee (1 : \mathsf{ab2}(x) = 0).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **137-22** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $1 : x = 0.$

...

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0).$

7: Aus `6.1.Fall`"$\mathsf{Re}x = 0\ldots$" und
aus `6.1.Fall`"$\ldots \mathsf{Im}x = 0$"
folgt via **96-31**: $x = 0.$

8: Aus 7"$x = 0$"
folgt via **128-2**: $\mathsf{ab2}(x) = 0.$

9: Aus **98-24**"$1 : 0 = 0$" und
aus 8"$\mathsf{ab2}(x) = 0$"
folgt: $1 : \mathsf{ab2}(x) = 0.$

`6.2.Fall` $1 : \mathsf{ab2}(x) = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : \mathsf{ab2}(x) = 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $1 : \mathsf{ab2}(x) = 0.$

1: Aus `VS` gleich "$1 : \mathsf{ab2}(x) = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt: $1 : \mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

2: Aus 1"$1 : \mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **123-7**: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

3: Aus 2"$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl"
folgt via **128-1**: x Zahl.

4: Aus 3"x Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}.$

5: Aus 4"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$1 : \mathsf{ab2}(x) = 0$"
folgt via **137-21**: $(\mathsf{ab2}(x) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty) \vee (\mathsf{ab2}(x) = -\infty).$

6: Aus 5"$(\mathsf{ab2}(x) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty) \vee (\mathsf{ab2}(x) = -\infty)$" und
aus **128-14**"$\mathsf{ab2}(x) \neq -\infty$"
folgt: $(\mathsf{ab2}(x) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty).$

Beweis **137-22** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{ab2}(x) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(\mathsf{ab2}(x) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{ab2}(x) = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{ab2}(x) = 0$"
folgt via **128-2**: $x = 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1.2.Fall` $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$"
folgt via **128-8**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

Beweis **137-22** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

Aus **98-24** "$1 : 0 = 0$" und
aus `1.1.Fall` "$x = 0$"
folgt: $1 : x = 0$.

`1.2.Fall` $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **128-8**: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`3:` Aus `2.1` "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3` "x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Im}x \text{ Zahl})$.

`5.1:` Aus `4` "$\mathsf{Re}x$ Zahl..."
folgt via **137-3**: $(\mathsf{Re}x) : (+\infty) = 0$.

`5.2:` Aus `4` "...$\mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **137-3**: $(\mathsf{Im}x) : (+\infty) = 0$.

`6.1:` $\mathsf{Re}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) : (+\infty) \stackrel{6.1}{=} 0$.

`6.2:`
$$\mathsf{Im}(1 : x) \stackrel{\mathbf{123-9}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{FS}-:}{=} -((\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \stackrel{2.2}{=} -((\mathsf{Im}x) : (+\infty)) \stackrel{5.2}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$$

`7:` Aus `6.1` "$\mathsf{Re}(1 : x) = \ldots = 0$" und
aus `6.2` "$\mathsf{Im}(1 : x) = \ldots = 0$"
folgt via **96-31**: $1 : x = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x = 0$.

$\square$

137-23. Es gilt $0 \neq x \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$:

137-23(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`ii)` $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-23** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Es gilt: $(1 : x = 0) \vee (0 \neq 1 : x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $1 : x = 0$.

`3:` Aus `2.1.1.Fall`"$1 : x = 0$"
folgt via **137-22**: $(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`4:` Aus `3`"$(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \notin \mathbb{C}$.

`6:` Es gilt `5`"$x \notin \mathbb{C}$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{C}$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq 1 : x$.

`2.1.2.Fall` $0 \neq 1 : x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq 1 : x$"

`2.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq 1 : x$" und
aus `1`"$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

Beweis **137-23** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus **98-24**"$1 : 0 = 0$" und
aus `1.1.1.Fall`"$x = 0$"
folgt: $1 : x = 0$.

`3:` Es gilt 2"$1 : x = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x$.

`1.1.2.Fall` $0 \neq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq x$"

...

<u>Beweis **137-23**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

...

`1.2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`1.2.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 : x$ Menge.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2.1`"$1 : x$ Menge"
folgt via **96-17**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `1.2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`6:` Aus `5`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`7:` Aus `6`"$1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $1 : x \notin \mathbb{B}$.

`8:` Es gilt `7`"$1 : x \notin \mathbb{B}$".
Es gilt `2.2`"$1 : x \in \mathbb{B}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{B}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A2` | "$x \in \mathbb{B}$"

...

Beweis **137-23** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

...

`2:` Es gilt: $(x \in \mathbb{C}) \vee (x \notin \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{C}$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{C}$.

`3:` Aus `A2` gleich "$x \in \mathbb{B}$" und
aus `2.2.Fall`"$x \notin \mathbb{C}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **137-22**: $1 : x = 0$.

`5:` Es gilt `4`"$1 : x = 0$".
Es gilt `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A3` | "$x \in \mathbb{C}$"

`3:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x$" und
aus `A3` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

□

137-24. Es gilt $0 \neq x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$:

137-24(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`ii)` $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-24** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-6**: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `1.2`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq 1 : x$.

`4:` Aus `3`"$0 \neq 1 : x$" und
aus `1.1`"$1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **137-24**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x$ Zahl.

`2.1:` Aus `1.1`"$1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \ldots$" und
aus `1.2`"$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`2.3:` Aus `1.3`"$1 : x$ Zahl"
folgt via **96-17**: x Zahl.

`3.1:`

$$\begin{aligned} &0 \\ \stackrel{\mathbf{98-15}}{=}\ &-0 \\ \stackrel{2.1}{=}\ &-\mathsf{Im}(1 : x) \\ \stackrel{\mathbf{123-9}}{=}\ &-((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\ \stackrel{\mathbf{FS-:}}{=}\ &-(-(\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)) \\ \stackrel{\mathbf{100-4}}{=}\ &(\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x) \\ \stackrel{\mathbf{136-1}}{=}\ &(\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x)). \end{aligned}$$

`3.2:` Aus `2.2`"$0 \neq x \ldots$"
folgt via **128-2**: $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$.

`3.3:` Aus `2.2`"$\ldots x \in \mathbb{C}$"
folgt via **128-9**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2.3`"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`3.5:` Aus `2.3`"x Zahl"
folgt via **128-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **137-24** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

...

`4:` Aus `3.5` " $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$ "
folgt via **137-6**: $1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.4` " $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$ ",
aus `4` " $1 : \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{T}$ " und
aus `3.1` " $0 = \ldots = (\mathsf{Im}x) \cdot (1 : \mathsf{ab2}(x))$ "
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{Im}x = 0) \vee (1 : \mathsf{ab2}(x) = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $\mathsf{Im}x = 0$.

`6:` Aus `5.1.Fall` " $\mathsf{Im}x = 0$ "
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `6` " $x \in \mathbb{T}$ " und
aus `2.2` " $\ldots x \in \mathbb{C}$ "
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `2.2` " $0 \neq x \ldots$ " und
aus `7` " $x \in \mathbb{R}$ "
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`5.2.Fall` $1 : \mathsf{ab2}(x) = 0$.

`6:` Aus `5.2.Fall` " $1 : \mathsf{ab2}(x) = 0$ "
folgt via **137-22**: $(\mathsf{ab2}(x) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty)$.

`7:` Aus `6` " $(\mathsf{ab2}(x) = 0) \vee (\mathsf{ab2}(x) = +\infty)$ " und
aus `3.2` " $0 \neq \mathsf{ab2}(x)$ "
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

`8:` Aus `7` " $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$ "
folgt via **95-18**: $\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{R}$.

`9:` Es gilt `8` " $\mathsf{ab2}(x) \notin \mathbb{R}$ ".
Es gilt `3.3` " $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$ ".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

$\square$

137-25. Nun wird ein Kriterium für $1 : x \in \mathbb{R}$ - und für $1 : x \in \mathbb{S}$ - angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `ii)` $\Rightarrow$ `i)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `ii)`:

137-25(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $1 : x \in \mathbb{R}$.

`ii)` $1 : x \in \mathbb{S}$.

`iii)` *"$x \in \mathbb{R}$" oder "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-25** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $1 : x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$1 : x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = +\infty) \vee (1 : x = -\infty)$.

`2:` Aus `1`"$(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = +\infty) \vee (1 : x = -\infty)$" und
aus **137-17**"$1 : x \neq +\infty$"
folgt: $(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = -\infty)$.

`3:` Aus `2`"$(1 : x \in \mathbb{R}) \vee (1 : x = -\infty)$" und
aus **137-17**"$1 : x \neq -\infty$"
folgt: $1 : x \in \mathbb{R}$.

Beweis **137-25** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $1 : x \in \mathbb{R}$.

`1:` Es gilt: $(1 : x = 0) \vee (0 \neq 1 : x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$1 : x = 0$”
folgt via **137-22**: $(x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“$x = 0$” und
aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$”
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`2.2.Fall` $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

Aus `2.2.Fall`
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1.2.Fall` $0 \neq 1 : x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq 1 : x$” und
aus `VS` gleich “$1 : x \in \mathbb{R}$”
folgt via **137-24**: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`“$\ldots x \in \mathbb{R}$”
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

Beweis **137-25** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **137-6**: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus 2“$1 : x \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{S}$.

`1.2.Fall` $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **137-22**: $1 : x = 0$.

`3:` Aus 2“$1 : x = 0$” und
aus **95-11**“$0 \in \mathbb{S}$”
folgt: $1 : x \in \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \in \mathbb{S}$.

$\square$

137-26. Nun wird ein Kriterium für $1 : x \in \mathbb{T}$ angegeben:

137-26(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $1 : x \in \mathbb{T}$.

`ii)` "$x \in \mathbb{T}$" *oder* "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-26** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $1 : x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$1 : x \in \mathbb{T}$" folgt via **95-16**: $(1 : x \in \mathbb{S}) \vee (1 : x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 : x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$1 : x \in \mathbb{S}$" folgt via **137-25**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$" folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3` folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`2.2.Fall` $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

Aus `2.2.Fall` folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1.2.Fall` $1 : x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$1 : x = \mathsf{nan}$" folgt via **137-12**: $x = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus 2"$x = \mathsf{nan}$" folgt via **95-16**: $x \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3` folgt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

Beweis **137-26** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{T}$.

Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **137-6**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`1.2.Fall` $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$”
folgt via **137-22**: $1 : x = 0$.

`3:` Aus 2“$1 : x = 0$” und
aus **95-12**“$0 \in \mathbb{T}$”
folgt: $1 : x \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 : x \in \mathbb{T}$.

□

137-27. Es gilt $1 : x \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $1 : x \in \mathbb{B}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $x \in \mathbb{B}$:

137-27(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $1 : x \in \mathbb{C}$.

`ii)` $1 : x \in \mathbb{B}$.

`iii)` $x \in \mathbb{B}$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **137-27**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $1 : x \in \mathbb{C}$.

Aus `VS` gleich "$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{B}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $1 : x \in \mathbb{B}$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{B}) \vee (x \notin \mathbb{B})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{B}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$1 : x \in \mathbb{B}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 : x$ Menge.

`3:` Aus 2"$1 : x$ Menge"
folgt via **96-17**: x Zahl.

`4:` Aus 3"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`5:` Aus 4"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`6:` Aus 5"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`7:` Aus 6"$1 : x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $1 : x \notin \mathbb{B}$.

`8:` Es gilt 7"$1 : x \notin \mathbb{B}$".
Es gilt `VS` gleich "$1 : x \in \mathbb{B}$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \in \mathbb{B}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{B}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-10**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

□

137-28. Nun wird ein Kriterium für $0 \neq 1 : x$ gegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Leftrightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `ii)`:

137-28(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq 1 : x$.

`ii)` *"$0 \neq x \notin \mathbb{B}$" oder "$0 \neq x \in \mathbb{C}$".*

`iii)` *"$x \notin \mathbb{B}$" oder "$0 \neq x \in \mathbb{C}$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-28** $\boxed{\texttt{i)} \Leftrightarrow \texttt{ii)}}$

`1:` Via **137-22** gilt: $(1 : x = 0) \Leftrightarrow ((x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(1 : x = 0)) \Leftrightarrow (\neg((x = 0) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Leftrightarrow ((\neg(x = 0)) \wedge (\neg(x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$.

`4.1:` Aus `3` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Leftrightarrow ((0 \neq x) \wedge (x \notin \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}))$.

`4.2:` Via **5-4** gilt: $(x \notin \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C}))$.

`5:` Aus `4.1` und aus `4.2` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Leftrightarrow ((0 \neq x) \wedge ((x \notin \mathbb{B}) \vee (x \in \mathbb{C})))$.

`6:` Aus `5` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Leftrightarrow (((0 \neq x) \wedge (x \notin \mathbb{B})) \vee ((0 \neq x) \wedge (x \in \mathbb{C})))$.

`7:` Aus `6` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Leftrightarrow ((0 \neq x \notin \mathbb{B}) \vee ((0 \neq x) \wedge (x \in \mathbb{C})))$.

`8:` Aus `7` folgt: $(0 \neq 1 : x) \Leftrightarrow ((0 \neq x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C}))$.

<u>Beweis **137-28**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $(0 \neq x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

Aus `VS`
folgt: $(x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“$x = 0$” und
aus **101-7**“$0 \in \mathbb{B}$”
folgt: $x \in \mathbb{B}$.

`4:` Es gilt `3`“$x \in \mathbb{B}$” .
Es gilt `1.1.Fall`“$x \notin \mathbb{B}$” .
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x \in \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`2.2.Fall` $0 \neq x$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$0 \neq x$” und
aus `1.1.Fall`“$x \notin \mathbb{B}$”
folgt: $0 \neq x \notin \mathbb{B}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(0 \neq x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(0 \neq x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`1.2.Fall` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

Aus `1.2.Fall`
folgt: $(0 \neq x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(0 \neq x \in \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

□

137-29. Via **137-28** ergibt sich ohne viel Mühe ein Kriterium für $0 \neq 1 : x$ Zahl:

137-29(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq 1 : x$ *Zahl.*

`ii)` "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$" *oder* "$0 \neq x \in \mathbb{C}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-29** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x$ Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \ldots$"
folgt via **137-28**: $(x \notin \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x$ Zahl"
folgt via **123-7**: x Zahl.

`3:` Aus 2"x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus 3"$x \in \mathbb{A}$" und
aus `1.1.Fall`"$x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`5:` Aus 4
folgt: $(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`1.2.Fall` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

Aus `1.2.Fall`
folgt: $(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

<u>Beweis **137-29**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (x \notin \mathbb{B})$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`4.1:` Aus `3`"x Zahl…"
folgt via **123-7**: $1 : x$ Zahl.

`4.2:` Aus `2`"$\ldots x \notin \mathbb{B}$"
folgt via **137-28**: $0 \neq 1 : x$.

`5:` Aus `4.2` und
aus `4.1`
folgt: $0 \neq 1 : x$ Zahl.

`1.2.Fall` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`"$\ldots 1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x$ Zahl.

`4:` Aus `2`"$0 \neq 1 : x \ldots$" und
aus `3`"$1 : x$ Zahl"
folgt: $0 \neq 1 : x$ Zahl.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq 1 : x$ Zahl.

$\square$

137-30. Nun wird ein Kriterium für $0 \neq 1 : x \in \mathbb{B}$ *und* für $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$ gegeben:

137-30(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq 1 : x \in \mathbb{B}$.

`ii)` $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`iii)` $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-30** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{B}$"
folgt via **137-27**: $1 : x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \ldots$" und
aus `1`"$1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{C}$"
folgt via **137-23**: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots 1 : x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `1`"$0 \neq 1 : x \ldots$" und
aus `2`"$1 : x \in \mathbb{B}$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{B}$.

$\square$

137-31. Im nunmehrigen Kriterium wird $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$ thematisiert:

137-31(Satz)

Die Aussgen i), ii) *sind äquivalent:*

i) $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$.

ii) "$x =$ nan" *oder* "$0 \neq x \in \mathbb{R}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **137-31** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x$ Zahl.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{T}$"
folgt via **137-26**: $(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

2: Aus VS gleich "$0 \neq 1 : x \ldots$" und
aus 1.1 "$1 : x$ Zahl"
folgt: $0 \neq 1 : x$ Zahl.

3: Aus 2 "$0 \neq 1 : x$ Zahl"
foglt via **137-29**: $(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

4: Aus 1.2 "$(x \in \mathbb{T}) \vee (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$" und
aus 3 "$(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{C})$"
folgt:

$$\begin{aligned} & (x \in \mathbb{T}) \wedge (x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \\ \vee \quad & (x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C}) \\ \vee \quad & (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \\ \vee \quad & (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

Beweis **137-31** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})$.

`5.1:` Aus `4.1.Fall`"$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`5.2:` Aus `4.1.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $x \notin \mathbb{B}$.

`6:` Aus `5.2`"$x \notin \mathbb{B}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $x \notin \mathbb{S}$.

`7:` Aus `5.1`"$(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$" und
aus `6`"$x \notin \mathbb{S}$"
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{R})$.

`4.2.Fall` $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`5:` Aus `4.2.Fall`"$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `4.2.Fall`$\ldots x \in \mathbb{C}$
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `4.2.Fall`$\ldots 0 \neq x \ldots$ und
aus `5`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis **137-31**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.3.Fall}}$ $(x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B})$.

`5.1:` Aus `4.3.Fall`"$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`5.2:` Aus `4.3.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (x \notin \mathbb{B})$.

`6:` Es gilt `5.1`"$x \in \mathbb{B} \ldots$" .
Es gilt `5.2`"$\ldots x \notin \mathbb{B}$" .
Ex falso quodlibet folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\texttt{4.4.Fall}}$ $(x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \wedge (0 \neq x \in \mathbb{C})$.

`5:` Aus `4.4.Fall`"$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **5-3**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})$.

`6:` Es gilt `5`"$\ldots x \notin \mathbb{C}$" .
Es gilt `4.4.Fall`"$\ldots x \in \mathbb{C}$" .
Ex falso quodlibet folgt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{R})$.

Beweis **137-31** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{R})$.

1: Nach VS gilt: $(x = \mathsf{nan}) \vee (0 \neq x \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

2: $1 : x \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} 1 : \mathsf{nan} \stackrel{\text{137-9}}{=} \mathsf{nan}$.

3.1: Aus **95-7**“$0 \neq \mathsf{nan}$” und
aus 2“$1 : x = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $0 \neq 1 : x$.

3.2: Aus 2“$1 : x = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-16**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$.

`1.2.Fall` $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1.2.Fall“$0 \neq x \in \mathbb{R}$”
folgt via **137-24**: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2“$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{T}$.

4: Aus 2“$0 \neq 1 : x \ldots$” und
aus 3“$1 : x \in \mathbb{T}$”
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{T}$.

$\square$

137-32. Nun wird ein Kriterium für $0 \neq 1 : x \in \mathbb{S}$ *und* für $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$ gegeben:

137-32(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq 1 : x \in \mathbb{S}$.

`ii)` $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

`iii)` $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **137-32** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : x \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-25**: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \ldots$" und
aus `1`"$1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-24**: $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-24**: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $1 : x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `1`"$0 \neq 1 : x \ldots$" und
aus `2`"$1 : x \in \mathbb{S}$"
folgt: $0 \neq 1 : x \in \mathbb{S}$.

□

- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).